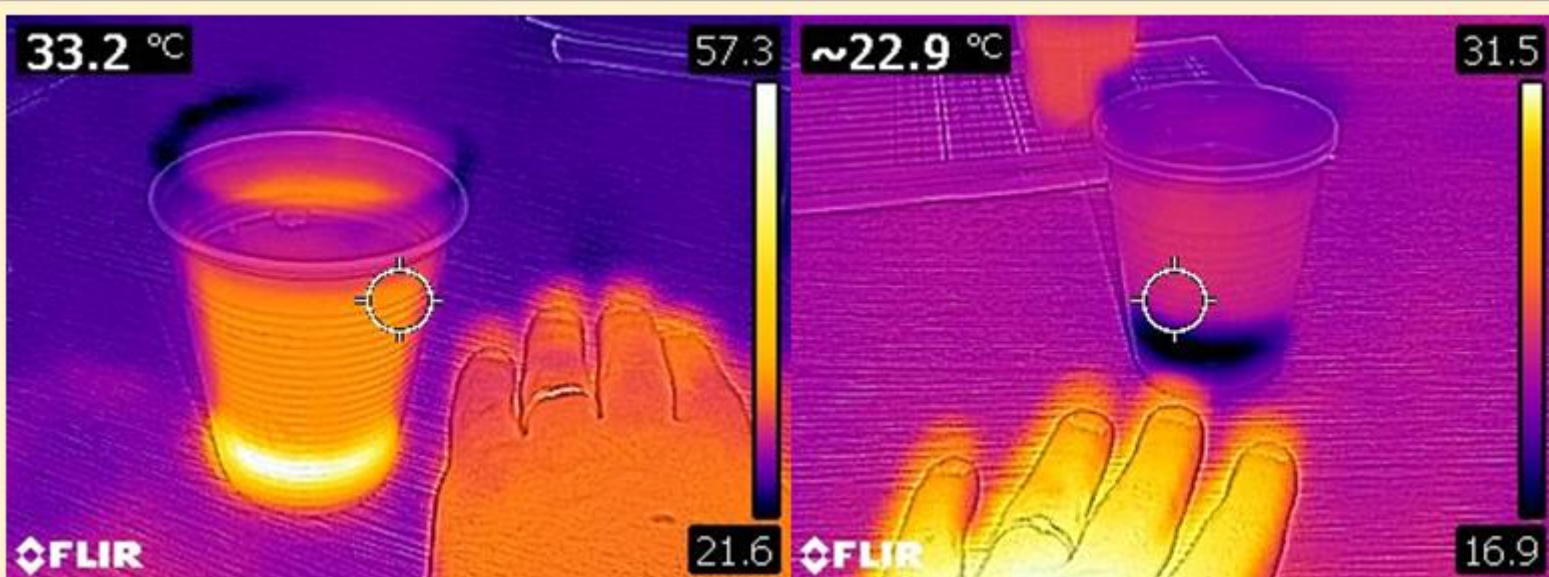
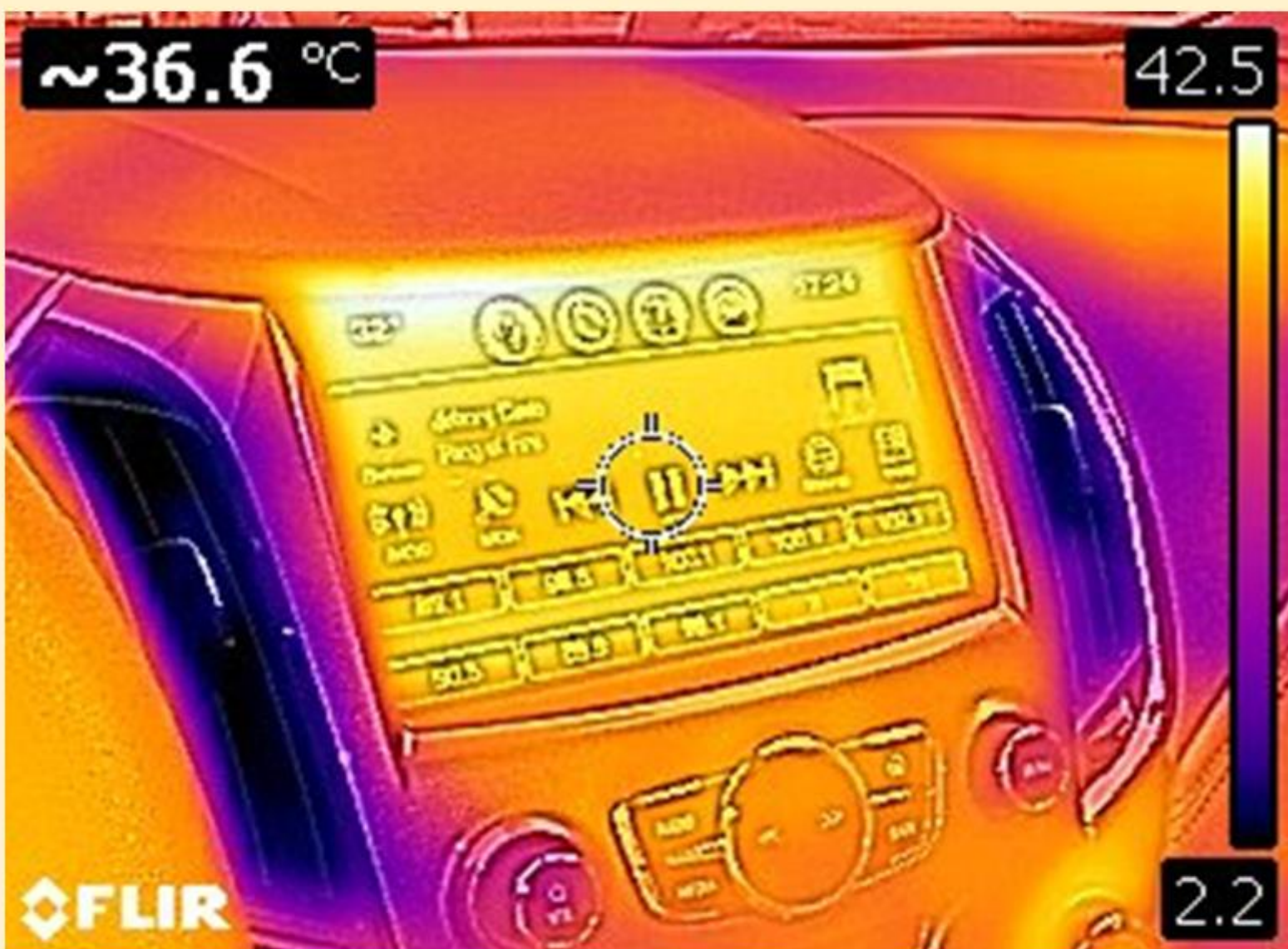




# APOSTILA DE SISTEMAS FLUIDOTÉRMICOS III EM984



Felipe Godoy Righetto  
Carlos Eduardo Keutenedjian Mady  
Clara Reis Pinto (Cap. 5)

**Apostila de Sistemas Fluidotérmicos III – EM984**

Baseada no livro Stoecker, Design of Thermal Systems

**Faculdade de Engenharia Mecânica da  
Universidade Estadual de Campinas**

**Editora Biblioteca /Unicamp**

**2º. Edição  
(Revisada e ampliada)**

Campinas

2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP  
Bibliotecária: Rose Meire da Silva CRB-8/5974

621.4028 Righetto, Felipe Godoy, 1991  
R449a Apostila de sistemas fluidotérmicos III – EM984: baseada no livro  
Stoecker, Design of thermal systems. / Felipe Godoy Righetto, Carlos  
Eduardo Keutenedjan Mady, Clara Reis Pinto. 2.ed. ver. e ampl.  
- Campinas, SP.: Biblioteca/Unicamp, 2019.

89 p.

1. Engenharia térmica. 2. Máquinas térmicas. 3. Calor. 4. Engenharia  
de sistemas. 5. Projetos de engenharia. I. Mady, Carlos Eduardo  
Keutenedjian, 1984- . II. Título.

**A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação do Copyright © (Lei n. 9610/1998).**

**“O conteúdo desta obra é de única e exclusiva responsabilidade dos autores”.**

## **Prefácio**

A UNICAMP me proporcionou ótimas experiências e valiosas oportunidades, uma das quais foi a possibilidade de escrever esta apostila, que será utilizada no curso de Sistemas Fluidotérmicos III, da Faculdade de Engenharia Mecânica, FEM. Agradeço, principalmente, ao professor Carlos Eduardo Keutenedjian Mady pelo apoio e a confiança que depositou em mim, sem o que seria impossível concluir este material. Espero que ele contribua para facilitar o estudo e o aprendizado dos futuros alunos, meus colegas, nesta disciplina. O conteúdo desta apostila abrange grande parte da ementa do curso de uma maneira de fácil leitura e compreensão. Pessoalmente, é uma expressiva conquista que prova que podemos atingir qualquer objetivo com foco e determinação. Torço para que vocês, colegas, sejam motivados por este trabalho e consigam êxito em suas carreiras.

Bom aprendizado!

Felipe Righetto

Tendo sido supervisor na elaboração deste trabalho, quero destacar o empenho do estudante, agora Engenheiro, Felipe Godoy Righetto. Minha participação como coautor foi lhe fornecer o material de apoio, o aprofundamento de alguns itens, a orientação com direcionamentos, correções e discussões construtivas. Agradeço tanto à UNICAMP, por tê-lo financiado como PAD da disciplina por três semestres, como ao estudante, por ter tornado realidade esta apostila, que foi baseada na referência do curso, o livro do Stoecker. Espero que ela facilite os alunos a entenderem o conteúdo e possam perceber a amplitude de aplicações dentro da área de energia e fluidos (com um foco um pouco maior para Termodinâmica e Transferência de Calor). Com o tempo, ela será complementada com alguns tópicos e capítulos, porém a base está pronta. Gostaria de deixar um agradecimento aos alunos da disciplina EM984 que não só apontaram as falhas, mas também fizeram sugestões construtivas.

Carlos Eduardo Keutenedjian Mady

# SUMÁRIO

|     |                                                                        |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------|----|
| 1   | - REVISÃO DE TERMODINÂMICA.....                                        | 6  |
| 1.1 | Introdução .....                                                       | 6  |
| 1.2 | Conceitos básicos .....                                                | 6  |
| 1.3 | Mudanças de estados termodinâmicos .....                               | 7  |
| 1.4 | Lei zero da termodinâmica .....                                        | 8  |
| 1.5 | Energia, trabalho e calor .....                                        | 8  |
| 1.6 | Primeira Lei da Termodinâmica.....                                     | 9  |
| 1.7 | Segunda Lei da Termodinâmica.....                                      | 12 |
| 1.8 | Relações de Gibbs (Tds).....                                           | 14 |
| 1.9 | Não idealidades de um ciclo.....                                       | 15 |
|     | Referências .....                                                      | 16 |
| 2   | - MODELAGEM DE SISTEMAS TÉRMICOS: AJUSTES DE CURVAS .....              | 16 |
| 2.1 | Introdução .....                                                       | 16 |
| 2.2 | Resolução de sistemas lineares .....                                   | 16 |
| 2.3 | Representação polinomial .....                                         | 19 |
| 2.4 | Interpolação exata.....                                                | 20 |
| 2.5 | Método mínimos quadrados .....                                         | 26 |
|     | Referências .....                                                      | 29 |
| 3   | - MODELAGEM DE SISTEMAS TÉRMICOS: TROCADORES DE CALOR...               | 30 |
| 3.1 | Modelagem de sistemas térmicos .....                                   | 30 |
| 3.2 | Trocadores de calor de contracorrente .....                            | 31 |
| 3.3 | Fluidos com mesma vazão e calor específico .....                       | 34 |
| 3.4 | Trocador de calor com mudança de fase .....                            | 35 |
| 3.5 | Qualidades de um trocador de calor .....                               | 36 |
|     | Referências .....                                                      | 37 |
| 4   | - MODELAGEM DE SISTEMAS TÉRMICOS: SOLUÇÕES BINÁRIAS.....               | 38 |
| 4.1 | Introdução .....                                                       | 38 |
| 4.2 | Separação de soluções binárias (colunas de separação e retíficas)..... | 42 |

|     |                                                                |    |
|-----|----------------------------------------------------------------|----|
| 4.3 | Entalpia e propriedades termodinâmicas de soluções reais.....  | 45 |
| 4.4 | Introdução ao ciclo de refrigeração por absorção .....         | 49 |
|     | Referências .....                                              | 53 |
| 5   | – SISTEMAS DE BOMBEAMENTO .....                                | 54 |
| 5.1 | Introdução.....                                                | 54 |
| 5.2 | Curva característica de uma bomba.....                         | 54 |
| 5.3 | Perdas de Carga Locais e Distribuídas .....                    | 55 |
| 5.4 | Curva Característica de um Sistema.....                        | 58 |
| 5.5 | Associações de bombas em série e em paralelo .....             | 58 |
| 5.6 | NPSH e Cavitação .....                                         | 59 |
|     | Referências .....                                              | 61 |
| 6   | - SIMULAÇÃO DE SISTEMAS .....                                  | 62 |
| 6.1 | Definição .....                                                | 62 |
| 6.2 | Diagrama de fluxo de informação ou diagrama de blocos. ....    | 62 |
| 6.3 | Método das aproximações sucessivas.....                        | 63 |
| 6.4 | Método de Newton-Raphson.....                                  | 66 |
| 6.5 | Método de Newton-Raphson para sistemas de equação.....         | 69 |
| 6.6 | Exemplo proposto pela turma de EM984 2º semestre de 2017 ..... | 71 |
|     | Referências .....                                              | 72 |
| 7   | - OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS .....                                 | 73 |
| 7.1 | Definição .....                                                | 73 |
| 7.2 | Preparação de um problema para otimização.....                 | 75 |
| 7.3 | Multiplicadores de Lagrange .....                              | 75 |
| 7.4 | Programação geométrica .....                                   | 81 |
| 7.5 | Métodos de busca para otimização.....                          | 83 |
| 7.6 | Busca exaustiva .....                                          | 84 |
| 7.7 | Método de Fibonacci .....                                      | 85 |
|     | Referências .....                                              | 88 |
|     | Bibliografia complementar .....                                | 89 |

# 1 - REVISÃO DE TERMODINÂMICA

## 1.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo revisar os conceitos já estudados em Termodinâmica I e II, Mecânica dos Fluidos I e II e Transferência de Calor I e II. Serão estudados aspectos mais simples, a exemplo das definições de sistema e volume de controle (mudança de abordagem de Lagrange para Euler por vias do Teorema de Transporte de Reynolds).

## 1.2 Conceitos básicos

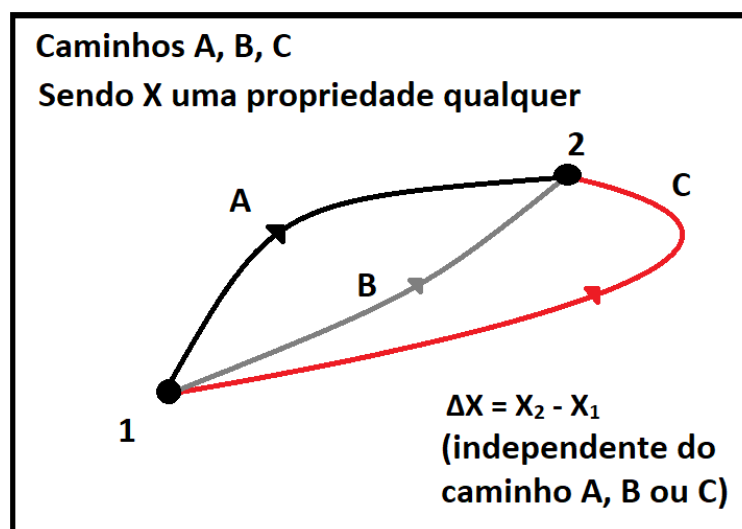
Pode-se dizer que um **SISTEMA** é caracterizado por determinada quantidade de matéria cujo comportamento é o objeto de estudo da termodinâmica. Ou seja, um sistema termodinâmico que apresenta quantidade de massa constante é o foco do objeto de estudo. Dessa forma, às vezes, se usa a redundância ao **denominar o sistema de fechado**. A partir do momento em que há passagem de massa pela fronteira, pode-se chamar essa região do espaço a ser analisado como **VOLUME DE CONTROLE**.

Define-se vizinhança como tudo que está fora da fronteira do sistema. Universo Termodinâmico ou meio é a região do espaço que circunda o sistema e interage com o meio aliado ao sistema.

Um ponto importante a ser discutido é a definição de **PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS**. Uma propriedade é uma característica macroscópica do sistema, tal como a massa, o volume, temperatura e pressão. Os valores das propriedades termodinâmicas podem ser atribuídos em qualquer dado tempo, sem a necessidade do comportamento prévio do sistema (não é necessário ter conhecimento da história pela qual o sistema passou para se avaliar a propriedade termodinâmica). Estas podem ser divididas em dois tipos.

1. Propriedades intensivas: Não dependem da massa. Por exemplo: pressão, temperatura, dentre outros. Pode-se ainda dividir a propriedade como o volume pela massa, por exemplo, volume específico ( $V = v/m$ , sendo  $v$  em  $\text{kg}/\text{m}^3$ ).
2. Propriedades extensivas: São aquelas que dependem da massa.

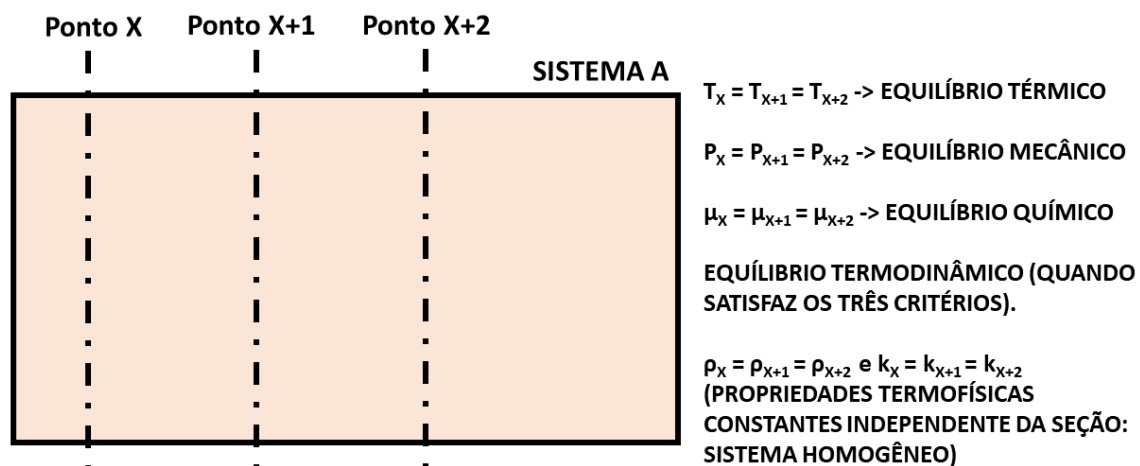
Outro conceito básico a ser discutido é **ESTADO TERMODINÂMICO**. O estado termodinâmico pode ser identificado ou descrito com base em certas propriedades termodinâmicas. Uma substância pura necessita de apenas duas propriedades para ser descrita; uma mistura de dois componentes necessita de três. O que define o estado é que, independentemente da história pela qual o sistema tenha passado para uma substância pura, bastam duas propriedades para caracterizar o estado. Dessa forma, pode-se afirmar que o estado independe do caminho. Basta saber os estados final (2) e inicial (1) para caracterizar uma variação de propriedade qualquer  $X$ , como mostrado na Figura 1.1.



*Figura 1.1 Representação esquemática de uma mudança de estado entre 2 e 1, de tal forma que uma propriedade  $X$ , qualquer, passa por uma variação  $\Delta X$ .*

### 1.3 Mudanças de estados termodinâmicos

Para poder se caracterizar uma mudança de estado termodinâmico, é necessária a definição de um conceito chamado **ESTADO DE EQUILÍBRIO**. Se isolarmos o sistema da sua vizinhança e não ocorrer nenhuma mudança em suas propriedades, conclui-se que o sistema estava em equilíbrio no momento em que foi isolado. Um sistema homogêneo é aquele cujo valor das propriedades intensivas é constante em qualquer ponto. Dessa forma, a Figura 1.2 indica tais simplificações e/ou atribuições.



**Figura 1.2 Sistema homogêneo e em equilíbrio.**

Processo cíclico ou ciclo termodinâmico - Quando um sistema passa por um processo e retorna ao seu estado inicial, pode-se afirmar que ele passou por um ciclo (em outras palavras, o estado final é o mesmo do inicial).

Processo reversível - Se o sistema e a vizinhança voltam ao estado inicial sem nenhum efeito residual (vestígio no meio) após um processo, este é denominado reversível. O processo quase estático é a idealização de um processo infinitesimal que ocorre próximo ao equilíbrio em todos os momentos.

#### **1.4 Lei zero da termodinâmica**

Se um corpo A está em equilíbrio térmico com um corpo C, e um corpo B também está em equilíbrio térmico com o corpo C, então, o corpo A está em equilíbrio térmico com o corpo B.

Com base nesta lei, surgem as primeiras reflexões acerca de medições de uma propriedade que indique o estado de um sistema, ou seja, dado um instrumento de medição e uma escala arbitrária, é possível obter a propriedade termodinâmica "Temperatura".

#### **1.5 Energia, trabalho e calor**

Definir a propriedade energia não é uma tarefa simples, uma vez que muitas das definições encontradas são, na verdade, de exergia. No entanto, ela pode ser classificada como energia elétrica, mecânica, interna, cinética, potencial, química, dentre outras. Algumas características da energia podem ser descritas. Por exemplo: ela pode ser armazenada de diversas formas, convertida de uma forma para outra e transferida entre um sistema e/ou um volume de controle. Como constatação, sabe-

se que a quantidade total de energia se conserva em todas as transformações e transferências.

Para um sistema mudar de estado deve sofrer iterações de fronteira que descrevem o caminho pelo qual o sistema passou, isto é, o sistema só se comunica com o meio por vias de calor e trabalho.

- ✓ **Trabalho** é um efeito de fronteira, **energia em trânsito**, cujo único efeito no meio pode ser caracterizado pelo levantamento de um peso. A forma diferencial dessa expressão é:  $\delta W$  cuja integral fornece  ${}_1W_2$ .
- ✓ **Calor** é um efeito de fronteira, cuja transferência de energia é associada a uma diferença de temperatura. A forma diferencial dessa expressão é  $\delta Q$ , cuja integral fornece  ${}_1Q_2$ .

Destaca-se que não se usa diferencial exato em nenhum dos casos (calor e trabalho), pois se trata de um efeito de fronteira, ou seja, o sistema realiza trabalho ou sofre uma transferência de calor para que ocorra uma mudança no estado termodinâmico. Por isso, não se pode usar o  $dX$  ou  $\Delta X$  para representar tais efeitos que são funções de linha.

## 1.6 Primeira Lei da Termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica rege que a **conservação da energia**, ou seja, a quantidade de energia de um sistema isolado antes e depois de um processo é a mesma. Para recordar a Primeira Lei é preciso recorrer a alguns aspectos importantes.

- ✓ **Primeira Lei da Termodinâmica para um sistema.**

$${}_1Q_2 - {}_1W_2 = U_2 - U_1 + m \left( \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \right) + mg(Z_2 - Z_1) \quad 1-01$$

- ✓ **Entalpia.**

$$h = u + pv \quad 1-02$$

- ✓ **Calores específicos a volume e pressão constante.**

$$c_v = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_{v=cte} \quad 1-03$$

$$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{p=cte} \quad 1-04$$

- ✓ **O Teorema de Transporte de Reynolds** faz a mudança entre a abordagem de Lagrange (fixa-se o sistema em um componente do espaço), para a de Euler (fixa-se o volume de controle em uma região do espaço)

$$\frac{DB_{sist}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (V \cdot n) dA \quad 1-05$$

- ✓ **Balanço de massa para um sistema:**

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = 0 \quad 1-06$$

Aplicando o teorema de transporte de Reynolds na equação 1-06, temos que  $B=m$ , e sabendo que  $b = B/m$ ,  $b=1$ . Com isso, é possível deduzir o balanço de massa para o volume de controle. Tal equação é conhecida como a “Equação da Continuidade” (Equação 1-09).

- ✓ **Balanço de massa para um volume de controle:**

A Equação 1-07 o balanço de massa para um volume de controle como será usada no texto.

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_s \quad 1-07$$

Para calcular tal equação, deve-se fazer uma hipótese que o sistema Termodinâmico é homogêneo e está em equilíbrio (Figura 1.2). Destaca-se ainda que as distribuições de velocidades devem ser uniformes nas seções. Portanto, pode-se simplificar a Equação da continuidade 1-09 para a Equação 1-10, também denominada de “balanço de massa”.

$$\frac{Dm_{sist}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho 1 dV + \int_{SC} \rho 1 (V \cdot n) dA \quad 1-08$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (V \cdot n) dA \quad 1-09$$

$$0 = \frac{dm_{VC}}{dt} - \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_s \quad 1-10$$

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_s \quad 1-07$$

✓ **Primeira Lei da Termodinâmica para um volume de controle:**

Caso o teorema de transporte de Reynolds seja utilizado para estudar a variação da energia em uma fronteira, tal que  $B=E$ , portanto,  $b=e$ , tem-se:

$$\frac{DB_{sist}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (V \cdot n) dA \quad 1-05$$

$$\frac{DE_{sist}}{Dt} = \dot{Q}_{VC} - \dot{W}_{VC} - \dot{W}_{fluxo} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} \rho e (V \cdot n) dA \quad 1-11$$

$$\dot{W} = \dot{W}_{VC} + \int_{SC} \rho v (V \cdot n) dA = \dot{W}_{VC} + \sum \dot{m}_s (p_s v_s) - \sum \dot{m}_e (p_e v_e) \quad 1-12$$

$$\dot{Q}_{VC} - \dot{W}_{VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} (u + pv + gz + V^2/2) \rho (V \cdot n) dA \quad 1-13$$

$$\dot{Q}_{VC} - \dot{W}_{VC} = \frac{dE_{VC}}{dt} - \sum_e \dot{m} \left( h + gz + \frac{V^2}{2} \right) + \sum_s \dot{m} \left( h + gz + \frac{V^2}{2} \right) \quad 1-14$$

✓ **Balanço de massa para volumes de controle em regime transiente e uniforme:**

$$\int_0^t \frac{dm_{VC}}{dt} dt = \int_0^t \left( \sum_e \dot{m}_e \right) dt - \int_0^t \left( \sum_s \dot{m}_s \right) dt \quad 1-15$$

$$m_{VC}(t) - m_{VC}(0) = \sum_e \int_0^t (\dot{m}_e) dt - \sum_s \int_0^t (\dot{m}_s) dt \quad 1-16$$

$$m_{VC}(t) - m_{VC}(0) = \sum_e m_e - \sum_s m_s \quad 1-17$$

✓ **Balanço de energia para volume de controle em regime transiente, desconsiderando energia cinética e potencial.**

$$U_{VC}(t) - U_{VC}(0) = Q_{VC} - W_{VC} + \sum_e \int_0^t \dot{m}_e h_e dt - \sum_s \int_0^t \dot{m}_s h_s dt \quad 1-18$$

Considerando a entalpia de entrada e de saída constantes no tempo, temos:

$$U_{VC}(t) - U_{VC}(0) = Q_{VC} - W_{VC} + \sum_e \dot{m}_e h_e - \sum_s \dot{m}_s h_s \quad 1-19$$

## Cálculo do trabalho e transferência de calor

Partindo da equação 1-14 que estabelece que só se consegue variar a energia do volume de controle por vias de efeito de fronteira associado a calor e trabalho, bem como transferência de massa/entalpia:

$$\frac{dE_{VC}}{dt} = \sum_e \dot{m} \left( h + gz + \frac{V^2}{2} \right) + \sum_s \dot{m} \left( h + gz + \frac{V^2}{2} \right) + \dot{Q}_{VC} - \dot{W}_{VC} \quad 1-14$$

Algumas hipóteses simplificadoras para todos os equipamentos.

- Pode-se desprezar a energia cinética e a potencial, assim tem-se  $E=U$
- Em regime permanente  $\frac{dE_{VC}}{dt} = 0$
- Desprezam-se as perdas de calor para o ambiente.

Para caldeiras e condensador.

- Perdas de pressão desprezíveis.

Para bombas e turbinas.

- Podem ser consideradas isentrópicas.

Deste modo, simplifica-se a Primeira Lei para a Equação 1-20 para regime permanente:

$$\dot{Q}_{VC} - \dot{W}_{VC} = \sum_s \dot{m}_s h_s - \sum_e \dot{m}_e h_e \quad 1-20$$

## 1.7 Segunda Lei da Termodinâmica

A segunda lei fornece o sentido da evolução espontânea de um processo. Seguem abaixo os enunciados que regem a segunda lei da termodinâmica:

- ❖ Enunciado de Clausius: “É impossível para qualquer sistema operar de tal forma que o único resultado seja a transferência de energia sob a forma de calor de um corpo mais frio para um corpo mais quente.”
- ❖ Enunciado de Kelvin – Planck: “É impossível para qualquer sistema operar em um ciclo termodinâmico e fornecer uma quantidade líquida de trabalho para sua vizinhança enquanto recebe calor de um único reservatório térmico.”
- ❖ Enunciado da entropia: “É impossível para qualquer sistema operar de uma forma que a entropia seja destruída.”

- ❖ Enunciado da irreversibilidade: “Todos os processos macroscópicos que envolvem muitas partículas são irreversíveis.”

As irreversibilidades podem ser internas ou externas, e os processos mais comuns que causam geração de entropia são:

- Atrito;
- Expansão não resistida;
- Troca de calor com diferença finita de temperatura;
- Misturas.

### ✓ Segunda Lei para sistemas fechados:

A Segunda Lei da Termodinâmica estabelece que só é possível mudar a propriedade entropia de um sistema por vias de transferência de calor a partir de uma transferência de calor de uma certa superfície e irreversibilidades associadas ao processo de conversão de energia.

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right) + \sigma \quad 1-25$$

No qual,  $\sigma$  é a entropia gerada (kJ/kgK) para levar o sistema do estado 1 ao estado 2.

Princípio do aumento da entropia: “Para um sistema isolado, a produção de entropia deve ser positiva (processo irreversível) ou nula (processo reversível)”.

- Corolário: Quando analisamos um sistema e seu meio (ou vizinhança), a soma das variações de entropia deve ser positiva ou nula.

$$\Delta S|_{sist} + \Delta S|_{meio} = \Delta S|_{universo} = \sigma \quad 1-26$$

### ✓ Segunda Lei da Termodinâmica para volume de controle

A entropia pode entrar ou sair de um volume de controle, associada à transferência de calor ou associada ao escoamento de massa. Logo, para encontrar o balanço de entropia para volume de controle, é preciso aplicar o teorema de Transporte de Reynolds, fazendo  $B=S$  e  $b=s$ .

$$\frac{dS_{VC}}{dt} = \sum_j \frac{\dot{Q}_j}{T_j} + \sum_e m_e s_e - \sum_s m_s s_s + \sigma_{VC} \quad 1-27$$

Importante: A mudança da entropia associada à transferência de calor a uma dada temperatura  $T_j$  (da superfície  $j$ ). A fronteira que se encontra a  $T_j$  é aquela em que

houve a troca de calor. Observe que, a variação da entropia do volume de controle só ocorre devido a taxa de entropia que entra ou sai do volume de controle por vias de transferência de massa, aliada à transferência de calor a uma dada temperatura e as irreversibilidades associadas à transferência de calor.

## 1.8 Relações de Gibbs (Tds)

Tomando um processo internamente reversível, sistema fechado, tem-se:

$$(\delta Q)_{rev.} - (\delta W)_{rev.} = dU \quad 1-28$$

Como temos que:

$$(\delta Q)_{rev.} = TdS \quad 1-29$$

E

$$(\delta W)_{rev.} = pdV \quad 1-31$$

A Primeira Lei torna-se o destacado na Equação 1-31. Note que apesar de ela ser deduzida para um caso bastante particular, porém a Equação 1-32 vale para qualquer processo, mais ainda, a partir dessas equações é que pode-se relacionar a primeira com a segunda lei, bem como propor tabelas de propriedades.:

$$TdS = dU + pdV \quad 1-32$$

Apenas montada a partir de um processo internamente reversível, a Equação 1-32 relaciona somente propriedades, **ou seja, vale para todo e qualquer processo.**

Sabe-se que:

$$H = U + pV \quad 1-33$$

Ou

$$dH = dU + pdV + Vdp \quad 1-34$$

$$dH - Vdp = dU + pdV \quad 1-35$$

Associando a equação 1-32 à equação 1-29 temos:

$$TdS = dH - Vdp \quad 1-36$$

As relações de Gibbs, ou Tds, são chamadas de **Equações Fundamentais** e são relevantes não só para o cálculo de variações de entropia, como também para muitas outras relações entre propriedades. Uma utilidade importante destas equações fundamentais é em uma mudança de fase: em uma mudança de fase, líquido para vapor, a variação da pressão é nula ( $dp = 0$ ) bem como a variação da temperatura ( $T = cte$ ); logo temos:

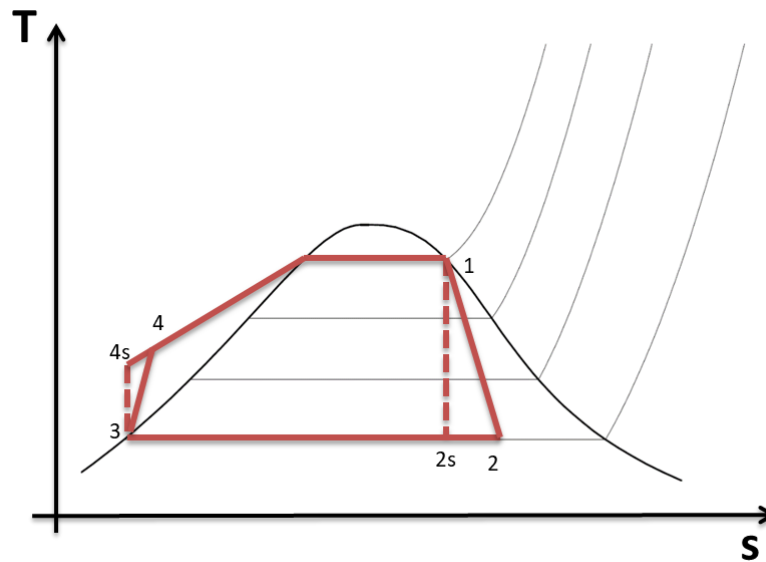
$$ds = \frac{dh}{T} \quad 1-37$$

$$s_g - s_f = \frac{(h_g - h_f)}{T} \quad 1-38$$

A equação 1-35 é a base para calcular as entropias e construir as tabelas termodinâmicas.

### 1.9 Não idealidades de um ciclo

Tendo como base um ciclo de potência a vapor, as não idealidades nas turbinas e nas bombas, tal que:



**Figura 1.3 - Ciclo Rankine com compressões e expansões não isentrópicas**

$$\eta_{turbina} = \frac{w_t}{w_{ts}} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}} \quad 1-39$$

$$\eta_{bomba} = \frac{w_{bs}}{w_b} = \frac{h_3 - h_{4s}}{h_3 - h_4} \quad 1-40$$

No estado 3', a temperatura do fluido é mais baixa que a da saturação (para uma mesma pressão), o que exigiria uma transferência de calor adicional na caldeira para levar à saturação. Fontes mais significativas de não idealidades estão associadas à combustão e a posterior transferência de calor dos produtos da combustão ao fluido de trabalho. A energia da água de resfriamento pode ser de utilidade limitada,

dependendo da temperatura de saída. Alguns efeitos menos expressivos são as perdas térmicas para o ambiente e o atrito, que acarreta em perda de pressão (perda de carga).

---

## Referências

- [1] VANWYLEN, J.; SONNTAG, R.E.; BORGNAKKE, C. **Fundamentos da Termodinâmica**. 6. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.
- [2] MORAN, M.J.; SHAPIRO, H.N. **Princípios de termodinâmica para engenharia**. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC–Livros Técnicos e Científicos Editora SA, 2009.
- [3] KLEIN, S. A. **Engineering Equation Solver (EES)**. F-Chart Software, 2017.

# 2 - MODELAGEM DE SISTEMAS TÉRMICOS: AJUSTES DE CURVAS

## 2.1 Introdução

Ajuste de curva é a técnica utilizada para representar comportamentos de um sistema na forma de funções. O resultado dessa técnica é uma equação que representa o sistema (dentro do intervalo estudado). É, então, possível obter o valor de uma característica do sistema para qualquer entrada, mesmo em pontos intermediários. Ressalta-se o cuidado em extrapolar a função para regiões fora do intervalo de validade da função, acarretando erros de aproximação. [1]

O exemplo mais comum em sistemas térmicos é a interpolação das tabelas termodinâmicas, de modo que é possível encontrar uma equação que, com uma temperatura ou pressão de entrada como variável independente, retorne à entalpia, por exemplo. [1]

Esse método facilita os cálculos de simulação e otimização dos sistemas que serão estudados nesta disciplina.

## 2.2 Resolução de sistemas lineares

No processo de simulação de um sistema térmico, geralmente se torna necessário resolver um sistema linear, sendo importante ter uma rotina computacional pronta para resolução desses problemas. Neste capítulo, apresentam-se alguns métodos de interpolação, que podem ser implementados em um programa computacional, os

quais serão necessários para a resolução de alguns sistemas. Como destacado em Stoecker, é comum para quem lida com esse tipo de problema se valer de uma função já programada para resolução de sistemas. Alguns programas computacionais, como aquele usado no curso EES® (Klein, 2017), são na verdade “*solvers*” de sistemas lineares e não lineares.

#### ✓ Método de Cramer:

Dado um sistema linear do tipo:

$$[A] * [X] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [B] \quad 2-01$$

A regra de Cramer afirma que:

$$x_i = \frac{\det([A] \text{ com } [B] \text{ substituindo a } i\text{ésima coluna})}{\det([A])} \quad 2-02$$

Exemplo:

$$x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{31} \\ a_{12} & b_2 & a_{32} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}} \quad 2-03$$

Exemplo Numérico:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2-04$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{30}{-15} = -2 \quad 2-05$$

Este método não funciona quando a matriz [A] tiver o determinante igual a ZERO, pois, nesse caso, existe mais de uma solução e o X não pode ser definido. [1]

#### ✓ Eliminação de Gauss:

O método de eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema linear original em um sistema equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior. Podemos dizer que os sistemas são equivalentes se obtiverem a mesma solução.

Exemplo:

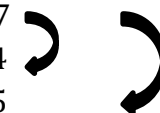
Dado o sistema original:

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -7 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5\end{aligned}$$

2-06

1º Passo: Eliminar os coeficientes de  $x_1$  multiplicando-se a equação por uma constante. Logo, multiplicaremos a primeira linha por -3 e adicionaremos na segunda linha; e também vamos multiplicar a primeira linha por -2 e adicionar na terceira linha.

$$\boxed{\times (-3)} \quad \boxed{\times (-2)}$$

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -7 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5\end{aligned}$$


De modo que obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -7 \\ 0x_1 + 13x_2 - 11x_3 &= 35 \\ 0x_1 + 9x_2 - 5x_3 &= 19\end{aligned}$$

2-07

2º Passo: Repetir o mesmo processo do primeiro passo para eliminar os coeficientes de  $x_2$  e assim conseguir um sistema equivalente com matriz de coeficientes triangular superior. Logo, vamos multiplicar a segunda linha por  $-9/13$  e adicionar na terceira linha.

$$\boxed{\times (-9/13)}$$

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -7 \\ 0x_1 + 13x_2 - 11x_3 &= 35 \\ 0x_1 + 9x_2 - 5x_3 &= 19\end{aligned}$$


Portanto, encontraremos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -7 \\ 0x_1 + 13x_2 - 11x_3 &= 35 \\ 0x_1 + 0x_2 + \frac{34}{13}x_3 &= -\frac{68}{13}\end{aligned}$$

2-08

A partir deste ponto é possível encontrar os valores:

$$\begin{aligned}x_3 &= -2 \\ x_2 &= 1 \\ x_1 &= 3\end{aligned}$$

✓ **Método de Gauss Seidel:**

O método de Gauss Seidel é muito utilizado para soluções de sistemas, em virtude de sua programação ser bastante simples. A seguir, temos a lógica que o método utiliza.

Dado um sistema do tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} \quad 2-09$$

Ou

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{21}x_2 & a_{31}x_3 \\ a_{12}x_1 & a_{22}x_2 & a_{32}x_3 \\ a_{13}x_1 & a_{23}x_2 & a_{33}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} \quad 2-10$$

Onde apenas  $x_1, x_2$  e  $x_3$  são as variáveis.

O método torna o sistema na seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}} [Y - a_{21}x_2^{(k-1)} - a_{31}x_3^{(k-1)}] \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}} [Z - a_{12}x_1^{(k)} - a_{32}x_3^{(k-1)}] \\ x_3^{(k)} &= \frac{1}{a_{33}} [W - a_{13}x_1^{(k)} - a_{23}x_2^{(k)}] \end{aligned} \quad 2-11$$

Observe que, para esse método, é necessário um chute inicial para  $k=0$ .

Aplicando as equações do método em um laço, por meio de um *software* de cálculo numérico ou alguma linguagem computacional, é possível encontrar facilmente os próximos valores de  $x^k$  para  $k > 0$ . Quanto maior o valor de  $k$ , menor é o erro que distancia o  $X$  (numérico) do  $X$  (analítico). Existem critérios de convergência de acordo com o tipo de sistema pode-se chegar a estabilidade do método, porém tais análises estão fora da análise do presente texto.

### 2.3 Representação polinomial

A representação polinomial é provavelmente a forma mais útil e comum de representação de equações.

$$f(x) = y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad 2-12$$

$$\dot{Q} = f(P_{entrada}, T_{entrada}, V_{comp}, P_{saída}) \quad 2-13$$

Entretanto, várias aplicações exigem mais de uma variável, em função de diferentes variáveis, x,y,z, dentre outras.

- ✓ Quando o número de pontos for exatamente a ordem da equação mais 1,  $n+1$ , pode-se usar um polinômio que interpola **exatamente** esses pontos. Chama-se de interpolação exata.
- ✓ Quando o número de pontos excede  $n+1$ , pode ser aconselhável o uso do polinômio que resulte na melhor aproximação, ou seja, melhor ajuste (*best fit*). Neste texto, será usado o método de **regressão linear** via mínimos múltiplos quadrados.

## 2.4 Interpolação exata

- ✓ **No caso de uma reta:**

Se os dados disponíveis forem adequados para descrever uma reta, teremos a seguinte situação:

Dados:  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$

Sabemos que:

$$y = a_0 + a_1x \quad 2-14$$

Escrevendo esta equação em função dos dados, temos:

$$y_0 = a_0 + a_1x_0 \quad 2-15$$

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 \quad 2-16$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad 2-17$$

Utilizando os métodos vistos anteriormente, é possível resolver este sistema e encontrar os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$ .

- ✓ **No caso de uma parábola:**

Dados:  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$

Sabemos que:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad 2-18$$

Escrevendo esta equação em função dos dados, temos:

$$y_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 \quad 2-19$$

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 \quad 2-20$$

$$y_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 \quad 2-21$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad 2-22$$

Caso haja um polinômio com grau muito elevado, pode-se definir uma nova variável independente (evita-se erro de precisão com  $a_i$  muito pequeno). Ex  $h = f(T)$ :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 \quad 2-23$$

$$y = a_0 + a_1\left(\frac{x}{100}\right) + a_2\left(\frac{x}{100}\right)^2 + a_3\left(\frac{x}{100}\right)^3 + a_4\left(\frac{x}{100}\right)^4 + a_5\left(\frac{x}{100}\right)^5 + a_6\left(\frac{x}{100}\right)^6 \quad 2-24$$

#### ✓ Variáveis independentes uniformemente espaçadas:

Algumas vezes, usam-se polinômios nos quais os valores de  $y$  são conhecidos com os valores de  $x$  igualmente espaçados. Ex: Valores extraídos de gráficos ou tabelas.

Como no gráfico tem-se 5 pontos, usa-se um polinômio de 4º grau.

De forma que  $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$ .

Range =  $R = x_4 - x_0$ .

$\Delta y_1 = y_1 - y_0$ ,  $\Delta y_2 = y_2 - y_0$ , ...

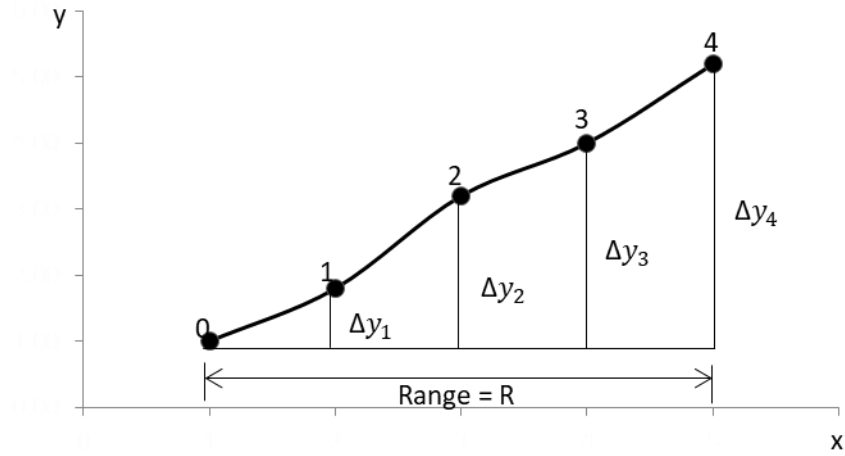


Figura 2-1 - Gráfico simbolizando uma curva uniformemente espaçada. Baseado em [1]

$$y - y_0 = a_1 \left[ \frac{n}{R} (x - x_0) \right] + a_2 \left[ \frac{n}{R} (x - x_0) \right]^2 + a_3 \left[ \frac{n}{R} (x - x_0) \right]^3 + a_4 \left[ \frac{n}{R} (x - x_0) \right]^4 \quad 2-25$$

Como se trata de um espaçamento uniforme, os pontos no eixo x são:

No primeiro ponto:

$$\left[ \frac{n}{R} (x - x_0) \right] = \left[ \frac{4}{R} \left( \frac{R}{4} \right) \right] = 1 \quad 2-26$$

$$\Delta y_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad 2-27$$

No segundo ponto:

$$\left[ \frac{n}{R} (x - x_0) \right] = \left[ \frac{4}{R} \left( \frac{2R}{4} \right) \right] = 2 \quad 2-28$$

$$\Delta y_2 = 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 \quad 2-29$$

Analogamente, para o terceiro e o quarto pontos:

$$\Delta y_3 = 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 \quad 2-30$$

$$\Delta y_4 = 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 \quad 2-31$$

Tabela 2-1 - Valores das constantes para equação de variáveis uniformemente espaçadas. Baseado em:  
[1]

| Equação            | $a_4$                                                                | $a_3$                                                                       | $a_2$                                             | $a_1$                          |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------|
| <b>Quarto Grau</b> | $\frac{1}{24}(\Delta y_4 - 4\Delta y_3 + 6\Delta y_2 - 4\Delta y_1)$ | $\frac{\Delta y_3}{6} - \frac{\Delta y_2}{2} + \frac{\Delta y_1}{2} - 6a_4$ | $\frac{\Delta y_2}{2} - \Delta y_1 - 3a_3 - 6a_4$ | $\Delta y_1 - a_2 - a_3 - a_4$ |
| <b>Cúbica</b>      | -                                                                    | $\frac{1}{6}(3\Delta y_1 + \Delta y_3 - 3\Delta y_2)$                       | $\frac{1}{2}(\Delta y_2 - 2\Delta y_1 - 3a_3)$    | $\Delta y_1 - a_2 - a_3$       |
| <b>Quadrada</b>    | -                                                                    | -                                                                           | $\frac{1}{2}(\Delta y_2 - 2\Delta y_1)$           | $\Delta y_1 - a_2$             |
| <b>Linear</b>      | -                                                                    | -                                                                           | -                                                 | $\Delta y_1$                   |

#### ✓ Interpolação de Lagrange:

O método da interpolação de Lagrange é aplicável para qualquer espaçamento de x. Tem como vantagem não precisar resolver o sistema de equações, porém, como desvantagem, a montagem trabalhosa do problema. No entanto, sua implementação computacional é simples.

Utilizando uma parábola como exemplo:

Dados:  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$

Sabemos que:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad 2-32$$

Na forma de Lagrange usa-se:

$$y = c_1(x - x_2)(x - x_3) + c_2(x - x_1)(x - x_3) + c_3(x - x_1)(x - x_2) \quad 2-33$$

Fazendo-se  $x = x_1$  e  $y = y_1$ , chega-se a:

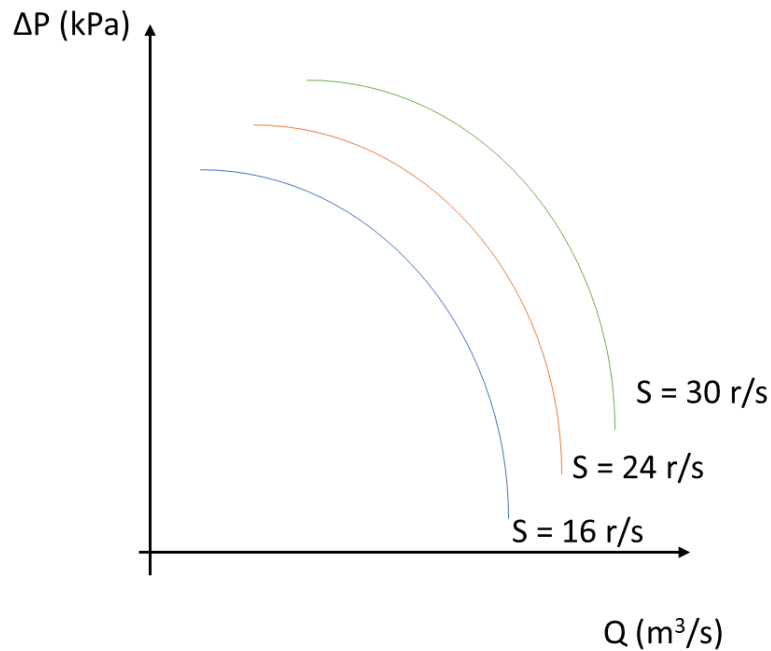
$$c_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \quad 2-34$$

Ou seja:

$$y = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{j=1}^n \frac{(x - x_j) \text{ omitindo } (x - x_i)}{(x_i - x_j) \text{ omitindo } (x_i - x_i)} \quad 2-35$$

✓ **Função de duas variáveis:**

É muito comum que encontremos um sistema que depende de mais de uma variável, como por exemplo, o caso abaixo, no qual o incremento da pressão é função do segundo grau em S (velocidade) e Q (vazão). Três curvas poderão ser escritas para S=30, 24 e 16 r/s.



**Figura 2-2–Valores de incremento de pressão em função da vazão volumétrica para diferentes rotações.**  
Adaptado de [1]

Para resolver este sistema, teremos que seguir alguns passos. Primeiramente, vamos fixar o valor de S e interpolar a variação da pressão em função de Q. Ou seja:

Para  $S=30\text{r/s}$ .

$$\Delta p_1 = a_1 + b_1 Q + c_1 Q^2 \quad 2-36$$

Repetindo o procedimento para os outros valores de S temos:

$S=24\text{r/s}$ .

$$\Delta p_2 = a_2 + b_2 Q + c_2 Q^2 \quad 2-37$$

$S=16\text{r/s}$ .

$$\Delta p_3 = a_3 + b_3 Q + c_3 Q^2 \quad 2-38$$

Seguindo, a constante  $a$  pode ser expressa como uma equação do segundo grau em termos de  $S$ , e usando os pontos dados  $(a_1, 30)$ ,  $(a_2, 24)$  e  $(a_3, 16)$ , é possível encontrar a seguinte expressão.

$$a = A_0 + A_1S + A_2S^2 \quad 2-39$$

De tal modo que:

$$\begin{aligned} a_1 &= A_0 + A_1(30) + A_2(30)^2 \\ a_2 &= A_0 + A_1(24) + A_2(24)^2 \\ a_3 &= A_0 + A_1(16) + A_2(16)^2 \end{aligned} \quad 2-40$$

Do mesmo modo para  $b$  e  $c$ :

$$b = B_0 + B_1S + B_2S^2 \quad 2-41$$

$$c = C_0 + C_1S + C_2S^2 \quad 2-42$$

Finalmente, para encontrar a equação que caracteriza o incremento da pressão em função das variáveis  $S$  e  $Q$ , temos que colocar as constantes encontradas na forma:

$$\Delta p = A_0 + A_1S + A_2S^2 + (B_0 + B_1S + B_2S^2)Q + (C_0 + C_1S + C_2S^2)Q^2 \quad 2-43$$

### ✓ Formas exponenciais:

A forma exponencial é uma relação física muito comum na natureza.

Para uma função do tipo  $y = bx^m$ , a melhor maneira de trabalhar graficamente essa equação é utilizando um gráfico com escala logarítmica para os valores de  $x$  e  $y$ , de tal modo que a constante  $b$  seja igual ao valor de  $y$ , quando  $x=1$  e o coeficiente  $m$  representam a inclinação da reta. Veja na figura:

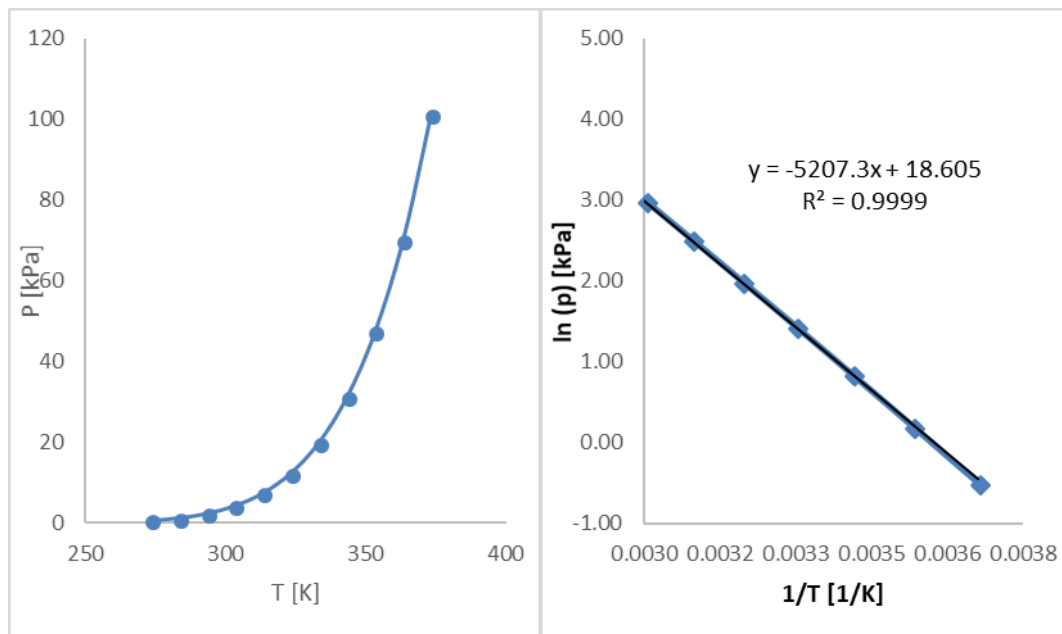


Figura 2-3 – Exemplo de linearização utilizando logaritmo da pressão de saturação em um função da temperatura de saturação, transformada em uma reta na forma  $\ln(p) = A/T + B$  [1]

Podemos também incluir uma constante na equação exponencial de forma a obter:

$$y = b + ax^m \quad 2-44$$

Aplicando Log, temos:

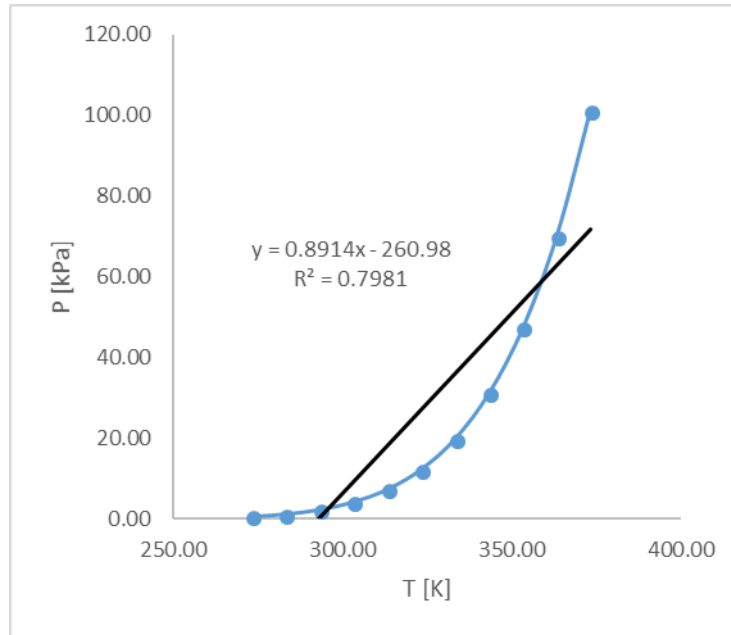
$$\log(y - b) = \log a + m \log x \quad 2-45$$

## 2.5 Método mínimos quadrados

Se  $m$  coeficientes de uma equação devem ser determinados, devem ser usados  $m$  pontos. Se  $n$  pontos ( $n > m$ ) estiverem disponíveis, é possível determinar os  $m$  coeficientes que resultam no melhor ajuste das equações.

Uma possível definição de melhor ajuste é aquela em que a soma dos valores absolutos dos desvios é mínima. Ou aquela cuja soma dos quadrados dos desvios seja mínima.

O erro mais comum ao se aplicar o método dos mínimos quadrados está em utilizar dados pouco precisos e selecionar uma ordem errada da equação a ser usada.



**Figura 2-04. Possíveis problemas associados à escolha do grau da função a ser interpolada sem saber-se ao certo o comportamento da curva. [1]**

Dado  $m$  pontos disponíveis:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), \dots, (x_m, y_m) \quad 2-46$$

E utilizando a equação:

$$y = a + bx. \quad 2-47$$

Calcula-se o quadrado dos desvios em relação aos pontos  $(x_i, y_i)$ :

$$\sum_{i=1}^m (a + bx_i - y_i)^2 \rightarrow \text{mínimo} \quad 2-48$$

O mínimo ocorre, quando as derivadas parciais em relação à  $a$  e  $b$  são nulas:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^m (a + bx_i - y_i)^2}{\partial a} = \sum_{i=1}^m 2(a + x_i - y_i) = 0 \quad 2-49$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^m (a + bx_i - y_i)^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^m 2(a + x_i - y_i)x_i = 0 \quad 2-50$$

Logo, temos:

$$ma + b \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i \quad 2-51$$

$$a \sum_{i=1}^m x_i + b \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad 2-52$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix} \quad 2-53$$

Para uma equação do segundo grau:

$$\sum_{i=1}^m (a + bx_i + c_i^2 - y_i)^2 \rightarrow \text{mínimo} \quad 2-54$$

Analogamente, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2y \end{bmatrix} \quad 2-55$$

#### ✓ MMQ para formas não polinomiais:

O método dos mínimos quadrados não se limita apenas à forma polinomial, é possível utilizá-lo também em formas não polinomiais, senoides e exponenciais.

Como exemplo, vamos utilizar a seguinte equação:

$$y = \text{sen}(2x) + b \ln x^2 \quad 2-56$$

Analogamente com o método polinomial:

$$\sum_{i=1}^m (a \text{sen}(2x_i) + b \ln x_i^2 - y_i)^2 \rightarrow \text{mínimo} \quad 2-57$$

Fazendo a derivada parcial em relação à  $a$  e  $b$  e escrevendo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sum \text{sen}^2(2x) & \sum \text{sen}(2x) \ln x^2 \\ \sum \text{sen}(2x) \ln x^2 & \sum (\ln x^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \text{sen}(2x) \\ \sum y \ln x^2 \end{bmatrix} \quad 2-58$$

Uma característica fundamental para que uma equação seja tratada pelo método dos mínimos quadrados é que ela tenha coeficientes constantes. No caso da Equação 2-59, nota-se que os termos  $a$  e  $c$  não aparecem como coeficientes, e a equação não pode ser tratada de maneira simples pelo método dos mínimos quadrados.

$$y = \text{sen}(2ax) + bx^c \quad 2-59$$

---

## Referências

- [1] STOECKER, W. V. **Design of Thermal Systems**. 3.ed. New York, NY:Editora McGraw-Hill, 1989.
- [2] KLEIN, S. A. **Engineering Equation Solver (EES)**. F-Chart Software, 2017.

# 3 - MODELAGEM DE SISTEMAS

## TÉRMICOS: TROCADORES DE CALOR

Principais equações baseadas na Primeira Lei da Termodinâmica e um modelo fenomenológico, que leva em conta o produto da área do trocador de calor pelo coeficiente global de troca.

Taxa de transferência de calor para um gás perfeito ou líquido:  $c_p$ ,  $e$  e  $c$  constantes.

$$q = \dot{m}cp(T_e - T_s) \quad 3-04$$

Trocador contracorrente:

$$T_{1,s} = T_{1,e} - (T_{1,e} - T_{2,e}) \left( \frac{1 - e^D}{\left( \frac{m_1 c_{p1}}{m_2 c_{p2}} \right) - e^D} \right) \quad 3-11$$

Onde:

$$D = UA \left( \frac{1}{m_1 c_{p1}} - \frac{1}{m_2 c_{p2}} \right) \quad 3-12$$

Mesma vazão:

$$T_{1,s} = T_{1,e} - \frac{(T_{1,e} - T_{2,e})}{\frac{m_1 c_{p1}}{UA} + 1} \quad 3-15$$

Mudança de fase:

$$T_s = T_e + (T_c - T_e)(1 - e^{-UA/mcp}) \quad 3-19$$

### 3.1 Modelagem de sistemas térmicos

A modelagem de sistemas térmicos é um processo para simplificar problemas complexos, por meio de idealizações, a fim de encontrar uma solução dentro das hipóteses simplificadoras adotadas. Com isso, busca-se como resultado um conjunto de equações para análise de um sistema ou um arranjo físico para realização de testes e experimentos. [1]

Modelar um sistema térmico é muito importante porque os sistemas são complexos, envolvem variações espaciais ou temporais, as equações governantes não são lineares, as condições de contorno e geometrias são complexas, os processos são acoplados e com propriedades variáveis. Nota-se que, neste curso, não se pretende analisar as variações no espaço (por exemplo, equação da condução), apenas variações temporais. [1]

Os sistemas térmicos são normalmente representados por um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares, portanto têm multidimensionalidade, dependência do tempo, domínio e condições de contorno complexas; a obtenção da sua solução, pois, é extremamente difícil e demanda muito tempo. [1]

Para solucionar esses sistemas, é necessário desenvolver um modelo menos complexo, eliminando parâmetros pouco importantes e fazendo simplificações e hipóteses adequadas, para que seja possível simplificar o problema e permitir a solução ou redução do número de experimento. [1]

### 3.2 Trocadores de calor de contracorrente

Esquema de um trocador de calor de contracorrente:

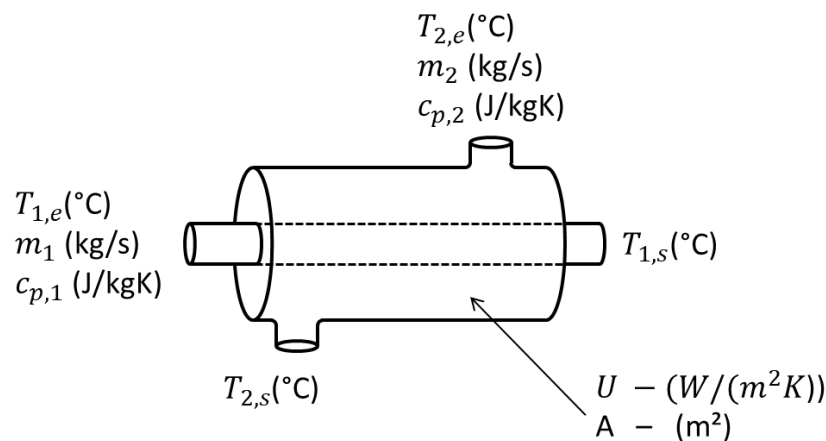


Figura 3-1 - Modelo de trocador de calor. Obtido e adaptado de [1]

Para análise de um trocador de calor em contracorrente não será realizada a hipótese de qual fluido se encontra a uma temperatura maior. Ademais, destaca-se que o objetivo dessa seção é obter equações que forneçam as condições de saída de uma das correntes, sabendo-se as condições de entrada e a física do problema (vazões mássicas, coeficiente global de transferência de calor, área do trocador de calor, dentre outros).

Porém, importa lembrar que trocador é um volume de controle. Dependendo da região em que traçarmos a fronteira do volume de controle, a Primeira Lei da Termodinâmica terá um formato.

$$\frac{dU}{dt} = \sum_e \dot{m}_e h_e - \sum_s \dot{m}_s h_s + \dot{Q}_{VC} - \dot{W}_{VC} \quad 3-01$$

Tendo-se o trocador de calor (bem isolado, ou seja, sem perdas para o ambiente), resulta o balanço de energia:

$$\sum_e \dot{m}_e h_e = \sum_s \dot{m}_s h_s \quad 3-02$$

Com a hipótese de Gás Perfeito,

$$m_1 cp_1 (T_{1,e} - T_{1,s}) = -m_2 cp_2 (T_{2,e} - T_{2,s}) \quad 3-03$$

Agora, escolhendo apenas a região contida pelo fluido 1, tem-se:

$$q_1 = m_1 cp_1 (T_{1,e} - T_{1,s}) \quad 3-04$$

Já, escolhendo-se apenas a região em que se encontra o fluido 2, tem-se que:

$$q_2 = m_2 cp_2 (T_{2,e} - T_{2,s}) \quad 3-05$$

Como a temperatura dos fluidos varia dentro do trocador, podemos também utilizar a equação da taxa de transferência de calor que utiliza a média logarítmica. A origem dessa equação pode ser vista com mais detalhes em [4]

$$q = UA \left[ \frac{(T_{1,e} - T_{2,s}) - (T_{1,s} - T_{2,e})}{\ln[(T_{1,e} - T_{2,s})/(T_{1,s} - T_{2,e})]} \right] \quad 3-06$$

Onde:

U = Coeficiente de transferência de calor global.

A = Área de transferência de calor do trocador.

Utilizando as seguintes equações:

$$m_1 cp_1 (T_{1,e} - T_{1,s}) = -m_2 cp_2 (T_{2,e} - T_{2,s}) \quad 3-07$$

$$m_1 cp_1 (T_{1,e} - T_{1,s}) = UA \left[ \frac{(T_{1,e} - T_{2,s}) - (T_{1,s} - T_{2,e})}{\ln[(T_{1,e} - T_{2,s})/(T_{1,s} - T_{2,e})]} \right] \quad 3-08$$

É possível resolver a primeira equação para  $T_{2,s}$  e substituir na segunda equação e obter o seguinte resultado:

$$\ln \left[ \frac{T_{1,e} - [T_{2,e} + (m_1 cp_1 / m_2 cp_2)](T_{1,e} - T_{1,s})}{T_{1,e} - T_{2,s}} \right] = UA \left( \frac{1}{m_1 cp_1} - \frac{1}{m_2 cp_2} \right) = D \quad 3-09$$

Simplificando, temos:

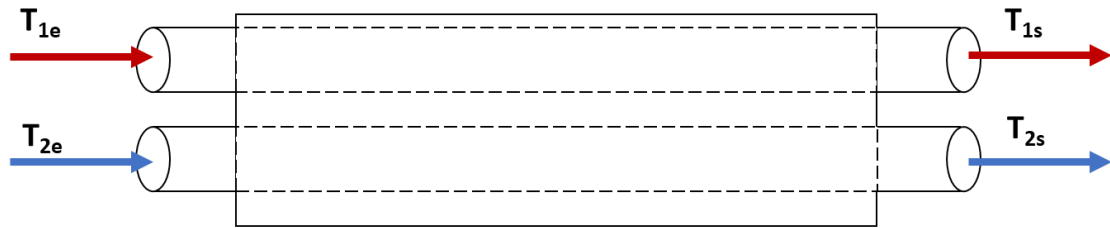
$$\frac{T_{1,e} - [T_{2,e} + (m_1 cp_1 / m_2 cp_2)](T_{1,e} - T_{1,s})}{T_{1,e} - T_{2,s}} = e^D \quad 3-10$$

Logo:

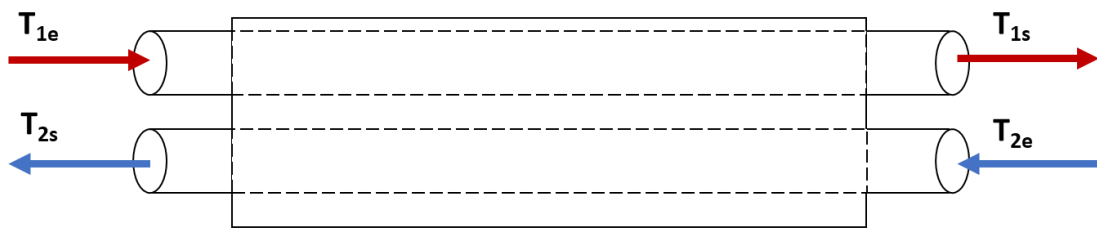
$$T_{1,s} = T_{1,e} - (T_{1,e} - T_{2,e}) \left( \frac{1 - e^D}{\left( \frac{m_1 cp_1}{m_2 cp_2} \right) - e^D} \right) \quad 3-11$$

No qual:

$$D = UA \left( \frac{1}{m_1 cp_1} - \frac{1}{m_2 cp_2} \right) \quad 3-12$$



(a)



(b)

Figura 3-2- Modelo de trocador com correntes paralelas (a) e contracorrente (b). Adaptado de [2]

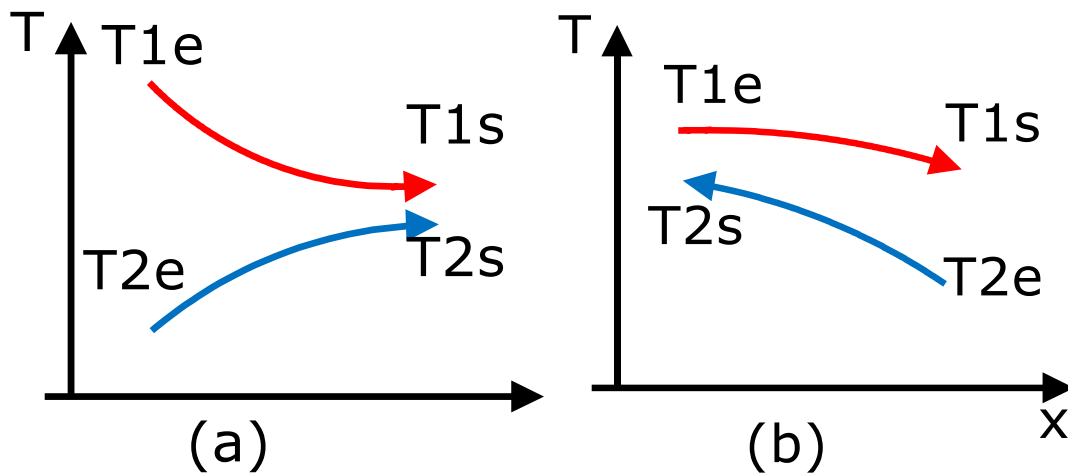


Figura 3-03 - Representação da variação da temperatura dentro do trocador. Modelo de trocador com correntes paralelas (a) e contracorrente (b). Adaptado de [2]

A imagem acima mostra a grande vantagem de um trocador de contracorrente. Quando se tem um trocador de fluxo paralelo, a temperatura final dos dois fluidos tende a uma temperatura intermediária em relação às temperaturas iniciais. Já no trocador de calor de contracorrente, a temperatura final do fluido quente se aproxima muito da temperatura inicial do fluido frio, e vice-versa, conseguindo-se, desse modo, maior troca de calor. Por esse motivo, os trocadores de calor de contracorrente são os mais comuns, e dificilmente se encontra o trocador de corrente paralela.

### 3.3 Fluidos com mesma vazão e calor específico

Para fluidos com mesma vazão e calores, não é possível aplicar a equação encontrada. Pois, neste caso:  $D = 0$  e  $\left( \frac{1-e^D}{\left( \frac{m_1 cp_1}{m_2 cp_2} \right) - e^D} \right) = \left( \frac{1-1}{1-1} \right)$  3-11

Para resolver esta questão, torna-se necessário fazer uma expansão por série de Taylor de  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$e^D = 1 + \frac{UA}{m_1 cp_1} \left( 1 - \frac{m_1 cp_1}{m_2 cp_2} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{UA}{m_1 cp_1} \left( 1 - \frac{m_1 cp_1}{m_2 cp_2} \right) \right]^2 + \dots \quad 3-13$$

$$\frac{1 - e^D}{\left( \frac{m_1 cp_1}{m_2 cp_2} \right) - e^D} = \frac{UA/mcp}{1 + UA/mcp} = \frac{1}{\frac{mcp}{UA} + 1} \quad 3-14$$

Logo, tem-se que:  $T_{1,s} = T_{1,e} - \frac{(T_{1,e} - T_{2,e})}{\frac{mcp}{UA} + 1}$  3-15

Neste caso particular, a diferença de temperatura de um fluido que passa por uma área  $dA$  é igual à do outro fluido. Essa diferença de temperaturas ( $\Delta T$ ) é igual a uma temperatura média que, nesse caso, substitui a diferença média logarítmica.

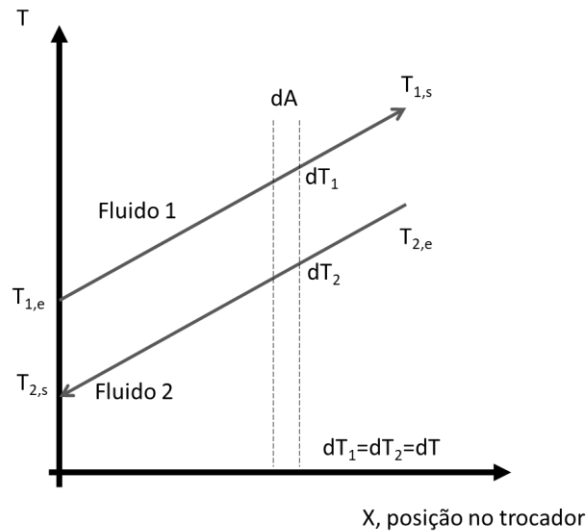


Figura 3-4 - Comportamento da temperatura ao longo do trocador de contrafluxo com os fluidos contendo a mesma capacidade térmica, baseado em [1]

### 3.4 Trocador de calor com mudança de fase

Outra abordagem deve ser aplicada quando um fluido do trocador de fase sofre uma mudança de fase. Neste caso, esse fluido estaria à temperatura constante.

Assim, o calor vai depender da média logarítmica da temperatura,  $\ln[(T_{1,e} - T_{2,s})/(T_{1,s} - T_{2,e})]$

$$q = UA \left[ \frac{(T_{1,e} - T_{2,s}) - (T_{1,s} - T_{2,e})}{\ln[(T_{1,e} - T_{2,s})/(T_{1,s} - T_{2,e})]} \right] = mcp(t_s - t_e) \quad 3-16$$

A partir desta equação, pode-se manipular e encontrar:

$$\frac{UA}{mcp} = \ln \left[ \frac{(T_c - T_e)}{(T_c - T_s)} \right] = - \ln \left[ \frac{(T_c - T_s)}{(T_c - T_e)} \right] \quad 3-17$$

$$e^{-\frac{UA}{mcp}} = \frac{T_c - T_s}{T_c - T_e} \quad 3-18$$

E chegar-se em:

$$T_s = T_e + (T_c - T_e)(1 - e^{-UA/mcp}) \quad 3-19$$

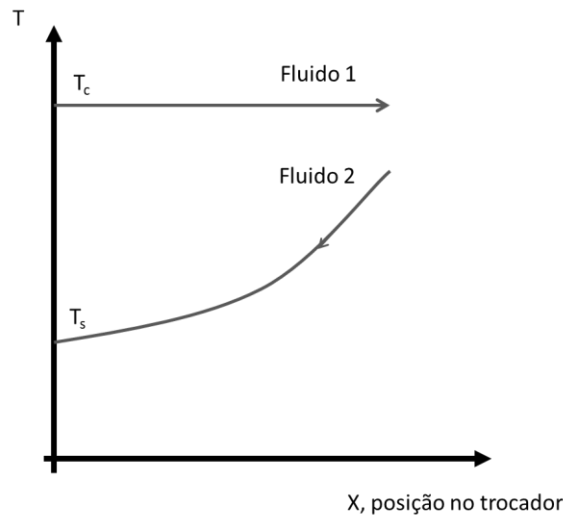


Figura 3-5 - Comportamento da temperatura ao longo do trocador de calor onde ocorre a mudança de fase de um dos fluidos [1]

### 3.5 Qualidades de um trocador de calor

Efetividade é uma característica importante dos trocadores de calor. É a razão entre a transferência de calor real e a transferência de calor ideal para uma configuração de trocador.

$$\varepsilon = \frac{q_{real}}{q_{ideal}} = \frac{q_{real}}{(mcp)(T_{alta} - T_{baixa})} \quad 3-20$$

Quando esta transferência de calor ideal é a máxima possível, podemos dizer que o trocador de calor tem área infinita.

O número de unidades de transferência (NUT) é um parâmetro adimensional muito utilizado em trocadores de calor, sendo definido como: [4]

$$NUT = \frac{UA}{mcp_{min}} \quad 3-21$$

É possível utilizar o NUT para encontrar a efetividade do trocador, sendo que este depende apenas do NUT, da razão entre as capacidades térmicas [3-22] e da configuração do trocador (contracorrente, paralelo, entre outros).

$$C_r = \frac{mcp_{min}}{mcp_{max}} \quad 3-22$$

A configuração do trocador de calor fornece o U, coeficiente de transferência global de calor, e o A, a área do trocador de calor. E mediante esses adicionados às características do fluido, é possível encontrar o NUT pela equação 21.

A partir das equações 21 e 22, é possível encontrar o coeficiente D:

$$D = NUT(1 - C_r) \quad 3-23$$

E, finalmente, encontra-se a efetividade pela seguinte equação:

$$\varepsilon = \frac{1 - e^D}{C_r - e^D} \quad 3-24$$

---

## Referências

- [1] STOECKER, W. V. **Design of Thermal Systems**. 3ed. New York, NY: Editora McGraw-Hill, 1989.
- [2] BERGMAN, T. L.; INCROPERA, F. P. **Fundamentals of heat and mass transfer**. 7ed. New York, N.Y: John Wiley & Sons, 2011.

# 4 - MODELAGEM DE SISTEMAS TÉRMICOS: SOLUÇÕES BINÁRIAS

## 4.1 Introdução

As primeiras máquinas térmicas foram concebidas utilizando-se uma solução pura como fluido de trabalho, sendo a mais comum a água. Porém, às vezes, se torna interessante a utilização de soluções binárias, em virtude de suas particularidades, nos sistemas térmicos. Destacam-se como exemplo o ciclo Kalina e o ciclo de refrigeração por absorção. Este último é o foco deste capítulo.

### ✓ Soluções Binárias

Primeiramente, é preciso definir solução binária: aquela em que o equilíbrio prevalece entre a fase líquida e a vapor. O líquido é uma solução de duas substâncias, A e B, assim como na fase vapor, que também possuem A e B. A Figura 1 ilustra o que é uma solução binária.

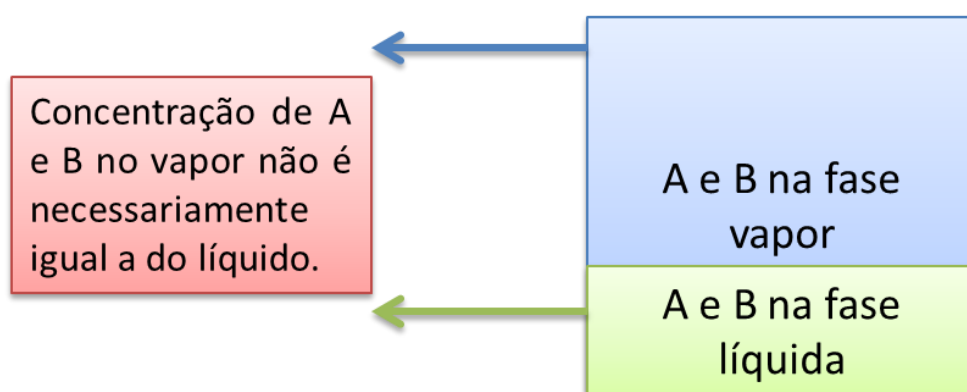


Figura 4-1. Representação esquemática de um sistema fechado bicomponente (substâncias A e B) com duas fases (líquida e vapor)

Para estudar este tipo de solução, é preciso descrever sua composição, o que pode ser feito de duas maneiras: ou pela fração mássica ou pela fração molar, conforme mostrado nas Equações 1 e 2.

$$mf_A = \frac{m_A}{m_A + m_B} \quad 4-01$$

$$y_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{m_A/M_A}{m_A/M_A + m_B/M_B} \quad 4-02$$

## ✓ Diagrama de fases

Para facilitar a análise da mudança de fase dessas soluções, é preciso desenvolver os diagramas de fases (T-x), nos quais é possível identificar que tal mudança ocorre com uma temperatura variável para cada concentração (o que difere das substâncias puras). Um exemplo deste diagrama está descrito na Figura 2 [1].

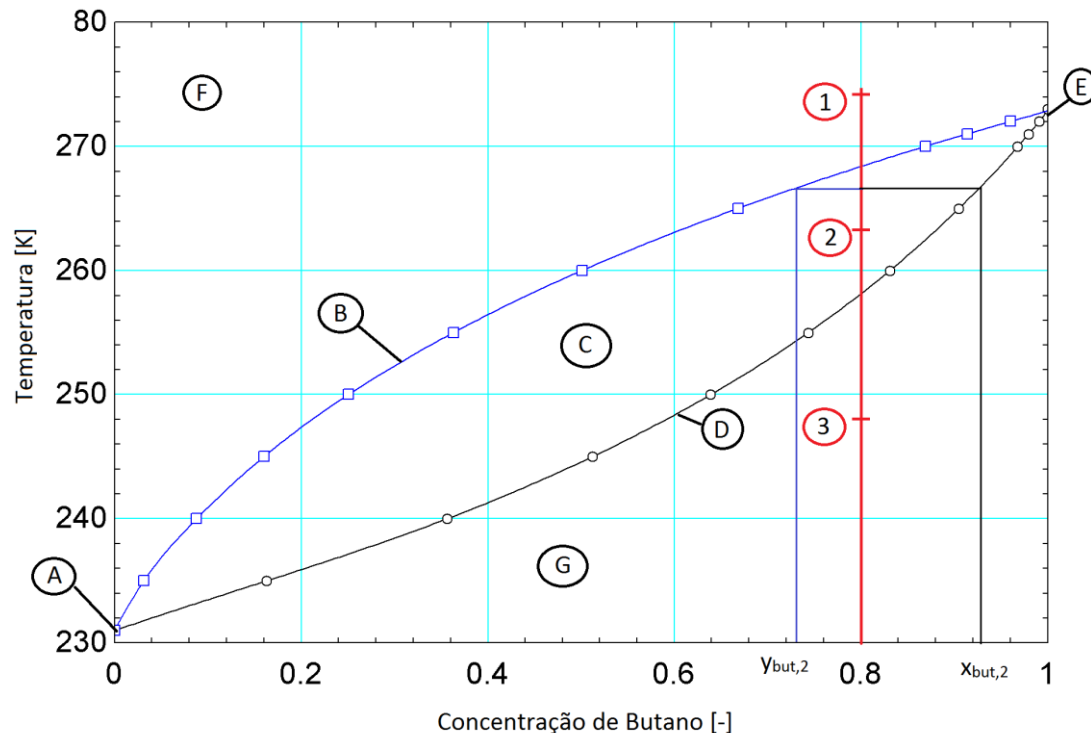


Figura 4-2. Representação de um diagrama T-X para uma mistura de propano e butano, baseado em [1]

Procedendo-se a uma análise detalhada da Figura 2, é possível destacar sete pontos importantes a serem discutidos, marcados de “A” a “F” [1].

Pode-se notar a existência de três regiões: na primeira, demarcada por “F” acima da linha azul indicada por “B”, existe apenas vapor da solução de butano e propano. A região entre as duas curvas é a região “C”, na qual há o equilíbrio entre as fases líquido-vapor. A região inferior, G, é a região na qual a solução existe apenas no estado líquido[1].

Escolhendo inicialmente uma concentração de butano equivalente a 0,8, pode-se dizer que o ponto 1 representa vapor superaquecido. Se a temperatura do vapor for reduzida à concentração constante, a solução encontra a linha B, ou seja, chega no “ponto de orvalho”, no qual se dá início à condensação. No ponto 2, é possível aplicar a regra da alavanca, para saber qual a concentração do butano na fase vapor ( $y_{but,2}$ ) e na fase líquida ( $x_{but,2}$ ). Deve-se salientar que a solução se encontra a uma concentração de 0,8. Se ainda ocorrer uma redução da temperatura (mantendo-se a concentração de butano em 0,8), a mistura vai cruzar a linha no chamado “ponto de

bolha” (linha D). Temperaturas abaixo dessa mistura terá apenas líquido, como indicado no ponto 3 [1].

Finalmente, a temperatura na qual as curvas encontram o eixo da esquerda é a temperatura de ebulição do Propano puro, ponto “A”, e quando encontram o eixo da direita é a temperatura de ebulição do Butano puro (100%), ponto “E”. Note que, nesses dois casos, a mudança de fase ocorre à temperatura constante[1].

Algumas misturas se comportam como substâncias puras na mudança de fase. Elas são chamadas de misturas azeotrópicas, quando a ebulição ocorre à temperatura constante; e eutéticas, quando a fusão ocorre à temperatura constante [1].

### ✓ **Equacionamento de soluções binárias**

Ao contrário de substâncias puras que necessitam apenas de duas propriedades para se definir o estado termodinâmico, no caso de uma mistura binária, são necessárias três informações: temperatura, pressão e concentração de uma das espécies [1].

**A primeira correlação** usada descreve a relação entre temperatura de saturação e pressão de saturação do composto puro. Essa expressão tem sua origem no equilíbrio de fases, ou seja, o potencial químico da substância na fase vapor deve ser igual ao potencial químico da mesma substância na fase líquido (se houver equilíbrio de fases, por exemplo, ebulição). Com base nessa constatação, é possível obter a expressão de Clapeyron que, simplificada, resulta nas Equações 3 e 4, chamadas de relações de Clapeyron-Clausius ou relações de equilíbrio. Mais informações da origem dessa equação podem ser obtidas nas referências [1] e [2].

Para a substância pura A:

$$\ln P_{sat,A} = C_{1,A} + \frac{C_{2,A}}{T_{sat}} \quad 4-03$$

Para substância pura B:

$$\ln P_{sat,B} = C_{1,B} + \frac{C_{2,B}}{T_{sat}} \quad 4-04$$

Nas quais os termos  $C_i$  são constantes que dependem da substância,  $T_{sat}$  é a temperatura de saturação absoluta, K e  $P_{sat}$  - pressão de saturação.

**A segunda correlação** é a Lei de Raoult, cujas bases são oriundas de resultados experimentais. Destaca-se que tal equação é válida para soluções ideais, como indicado nas Equações 5 e 6. Ressalta-se, então, que se consegue obter a pressão parcial de A na mistura da fase vapor, em função da concentração de A no líquido e de sua pressão de saturação como componente puro [1].

$$P_A = x_{A,l} P_{sat,A} \quad 4-05$$

$$P_B = x_{B,l}P_{sat,B} \quad 4-06$$

$P_A$  e  $P_B$  referem-se à pressão parcial de A ou B na mistura,  $x_{A,l}$  e  $x_{B,l}$  referem-se à fração molar da substância A ou B no líquido, e  $P_{sat,A}$  e  $P_{sat,B}$  à pressão de saturação da substância pura A ou B para a temperatura estudada.

**A terceira correlação** usada é a Lei de Dalton ou dos gases ideais. Tal conceito se baseia na ideia de que as forças intermoleculares não são significativas, pois se pode afirmar que “cada gás se comporta como se estivesse sozinho na temperatura e volume da mistura” [2]. As equações 7 e 8 descrevem o resultado desta Lei[1].

$$P_A = y_{A,v}P_t \quad 4-07$$

$$P_B = y_{B,v}P_t \quad 4-08$$

Somando-se as Pressões parciais de A e B, tem-se a pressão total do sistema, como mostrado na Equação 9.

$$P_t = P_A + P_B \quad 4-09$$

Finalmente, combinando-se a Lei de Raoult com a Lei de Dalton, chega-se à Equação 10.

$$\frac{x_{A,l}P_{SAT,A}}{y_{A,v}} = \frac{x_{B,l}P_{SAT,B}}{y_{B,v}} \quad 4-10$$

Na qual  $P_t$  é a pressão total,  $P_A$  é pressão parcial de A,  $P_B$  é a pressão parcial de B,  $x_{A,l}$  e  $x_{B,l}$  são as frações molares de A e B no líquido, e  $y_{A,v}$  e  $y_{B,v}$  são as frações molares de A e B no vapor.

#### ✓ Desenvolvimento de um diagrama de fases

Como desafio de como usar as Equações 3 a 10, este item é baseado no exemplo 5.20 da ref. [1], no qual se pede o diagrama T-x do Butano e Propano para uma pressão de 101300 Pa. As funções que descrevem o comportamento do butano e do propano puro, em equilíbrio durante a mudança de fase, são dadas:

$$\text{Butano:} \quad \ln P_{sat} = 21,77 - \frac{2795}{T_{SAT}} \quad 4-11$$

$$\text{Propano:} \quad \ln P_{sat} = 21,40 - \frac{2286}{T_{SAT}} \quad 4-12$$

### ✓ Efeito da pressão atmosférica no diagrama de fase

Deve-se salientar que a pressão influencia no comportamento do diagrama de fases, como pode ser observado na Figura 3. Quanto maior a pressão, o chamado “envelope” de fases se desloca para cima. Maiores pressões de processo acarretam em maiores temperaturas para que ocorra a vaporização da mistura [1].

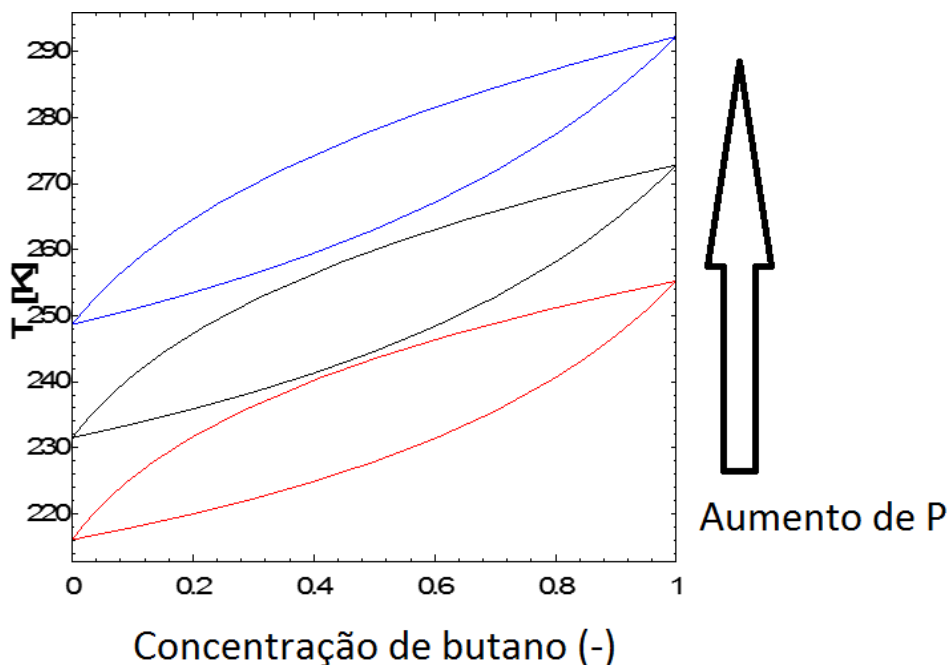
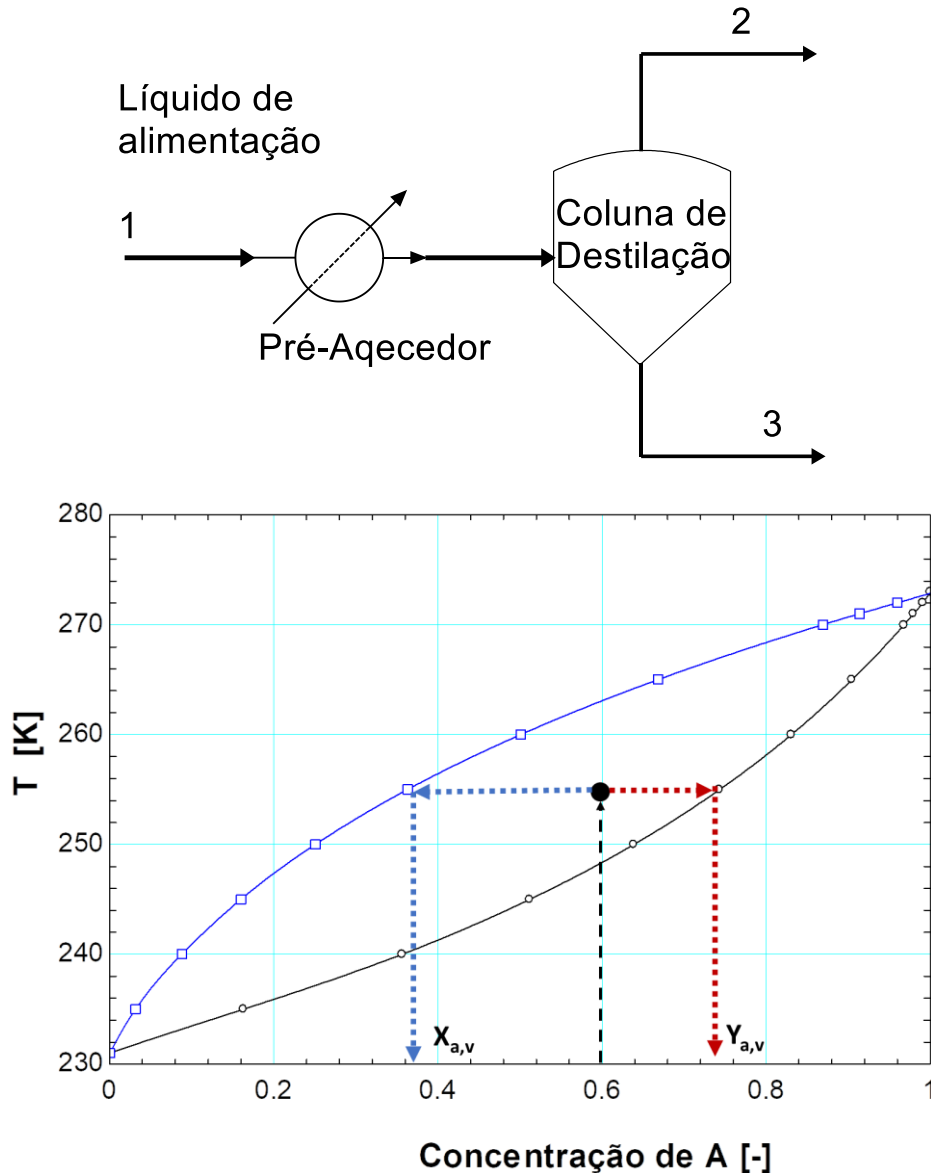


Figura 4-3. Diagrama de fases para três pressões de processo distintas. A curva azul possui a maior pressão, enquanto a curva em vermelho possui a menor pressão. Baseado em [1]

## 4.2 Separação de soluções binárias (colunas de separação e retíficas)

Para separar essas duas substâncias da mistura, é necessário fazer o processo da destilação. Esse processo consiste em pré-aquecer a mistura até uma temperatura na qual se inicie o processo de mudança de fase e, em seguida, passar por uma torre de separação que por gravidade separa a fase líquida do vapor. A Figura 4 mostra uma coluna de destilação em um estágio [1].

É desejável que haja uma alta fração molar da substância A no líquido e uma alta fração molar da substância B no vapor. Ou seja, a substância menos volátil deve estar mais presente (maior concentração) na fase líquida, enquanto a espécie mais volátil deve estar mais presente (maior concentração) na fase vapor. Como ilustra a figura seguinte [1]:



**Figura 4-3. Exemplo da coluna de destilação em um estágio com respectivo diagrama de fases. Nota-se que a concentração de A na fase líquida ficou mais baixa (o que quer dizer que a de B ficou mais alta) enquanto a concentração de A na fase vapor ficou mais alta. Adaptado de [1].**

Para melhorar a eficácia da destilação é utilizado o processo de retificação. Nesse processo, assume-se que entra líquido saturado, indicado no ponto  $i$ . Esse líquido passa por um vaporizador parcial, no qual é aquecido até a temperatura 2. Na parte inferior, o líquido é aquecido, enquanto que o vapor é resfriado. A separação ideal torna-se bem eficaz, dado que o líquido sai em uma concentração 3L, e o vapor sai a 1V. Existe ao longo da coluna equilíbrio entre  $T$  e  $p$ . Para torres reais deve-se ter uma diferença de temperatura entre líquido e vapor e diferença de pressões de vapor entre o líquido e vapor para que se tenha transferência de massa[1].

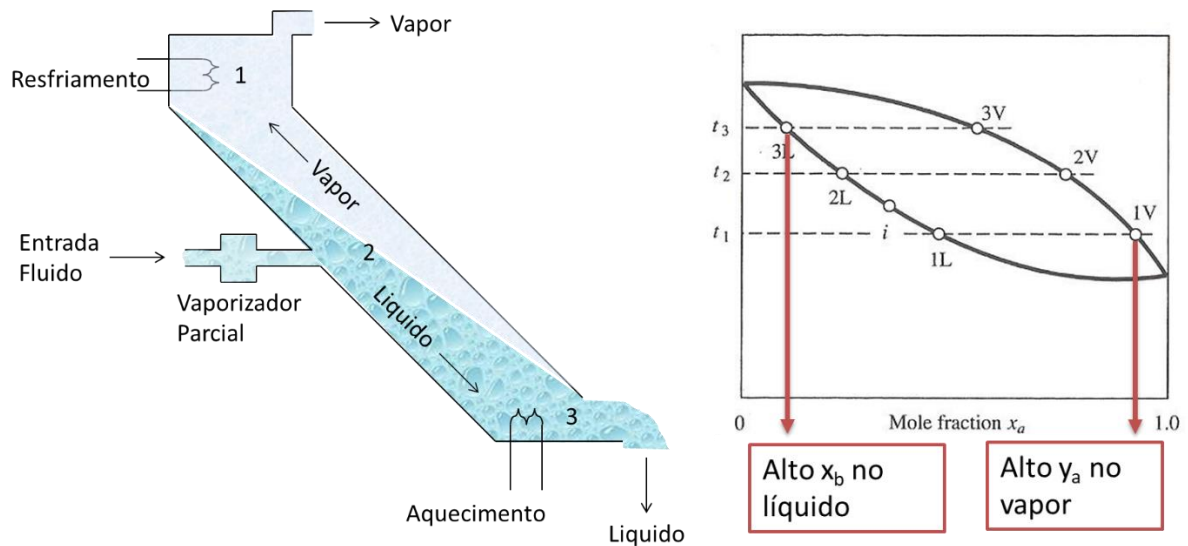


Figura 4-5. Representação esquemática de uma retífica com respectivo diagrama de fases, obtido em [1].

Por fim, a Figura 5 é uma representação esquemática de uma retífica real: cada altura representada por uma declividade na Figura é, na verdade, um estágio intermediário de equilíbrio, sendo utilizados “pratos” para garantir a troca de massa entre líquido e vapor, como indicado na Figura 6. Percebe-se que se resfria no condensador o vapor para garantir que a fase menos volátil condense e reaqueça o líquido para garantir a evaporação da fase mais volátil [1].

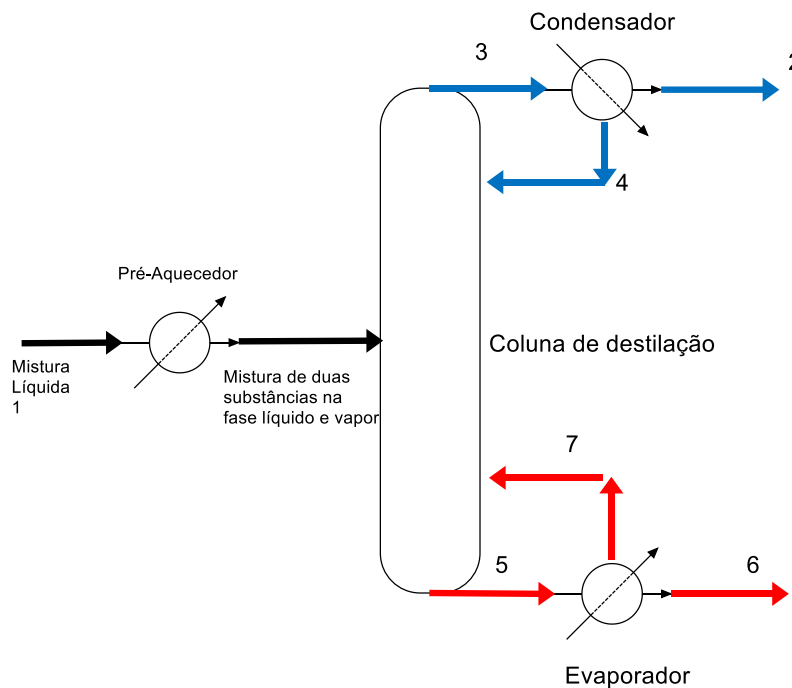


Figura 4-6 Torre de destilação com respectivos trocadores de calor (reaquecedor e condensador) obtido e adaptado de [1]

### 4.3 Entalpia e propriedades termodinâmicas de soluções reais

Valores de entalpia de soluções binárias e misturas de vapor são necessários ao fazer cálculos de energia. Quando duas soluções reais são misturadas, há uma mudança na temperatura da mistura, ou seja, pode haver uma liberação de energia. Tal efeito mostra que não é possível obter em uma mistura real a entalpia como uma ponderação dos componentes puros.

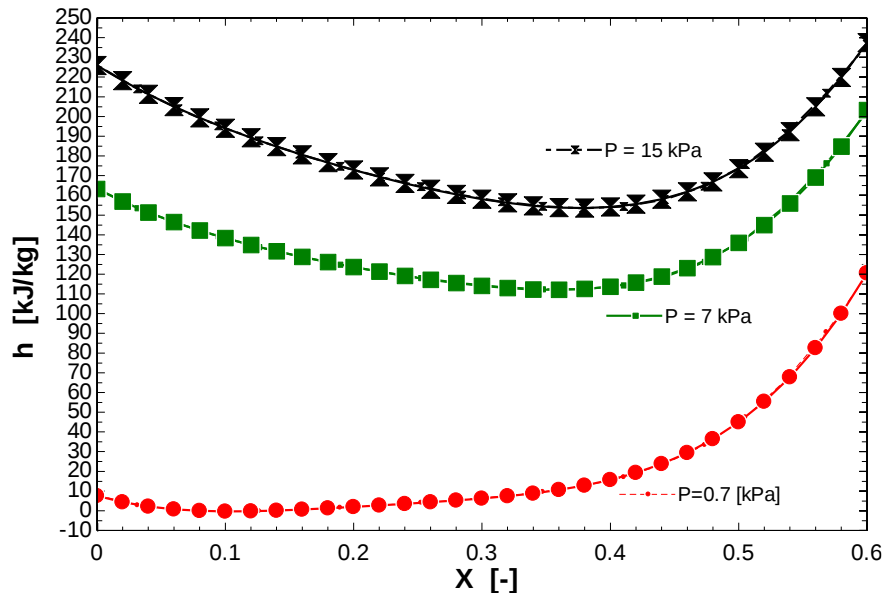


Figura 4-7 Entalpia de uma solução real (água e brometo de lítio) em função da fração molar de brometo de lítio. Baseado em [1,3]

Uma etapa fundamental na modelagem de sistemas térmicos é trabalhar com soluções binárias. Compreender essas soluções é primordial para entender o funcionamento do sistema de refrigeração por absorção, que será estudado em breve [1].

Para explicar tal comportamento, considera-se um sistema adiabático, no qual duas correntes na mesma temperatura se misturam. A corrente 1 contém uma solução de água com uma concentração de 50% de brometo de lítio e uma temperatura de 50°C. A vazão mássica dessa corrente equivale a 1,5 Kg/s. O fluxo de massa 2 contém uma solução de água com brometo de lítio a 60%, temperatura de 50°C e uma vazão mássica de 7,5 Kg/s. Tal exemplo é retirado da ref. [3]

Se a mistura se comportasse como ideal, seria intuitivo esperar que a temperatura de saída da mistura desses fluidos fosse 50°C, mas não é o que acontece.

Primeiramente, é preciso fazer um balanço de massa:

$$m_1 = 1,5$$

$$m_2 = 7,5$$

4-13

$$m_3 = m_1 + m_2 = 9 \text{ Kg/s}$$

Também é preciso fazer um balanço de espécie, LiBr (a quantidade de brometo de lítio que entra no volume de controle deve ser a mesma que deixa o volume de controle), sendo  $x$  a fração molar de LiBr:

$$x_3 m_3 = x_1 m_1 + x_2 m_2 \quad 4-14$$

$$x_3 = 0,583 \quad 4-15$$

Ao aplicar a Primeira Lei da Termodinâmica para um volume de controle adiabático e sem realização de trabalho, considerando que  $h_1 = 103,92 \text{ KJ/Kg}$  e  $h_2 = 134,99 \text{ KJ/Kg}$ , é possível encontrar o valor de  $h_3$  da seguinte forma.

$$h_3 = \frac{h_1 m_1 + h_2 m_2}{m_3} = 129,81 \text{ KJ/Kg} \quad 4-16$$

Ao cruzar os valores de  $x_3 = 0,583$  e  $h_3 = 129,81 \text{ KJ/Kg}$  no gráfico de entalpia por fração mássica, é possível encontrar o valor de aproximadamente  $51,4^\circ\text{C}$  [3]. Ou seja, misturas reais têm uma mudança de temperatura quando entram em contato, não sendo mais possível tratar a entalpia dessas como uma simples ponderação dos componentes puros [3].

Observe que, quando há mistura de dois fluidos, ocorre uma liberação de energia; isso é chamado de variação de entalpia da mistura, ou calor de mistura. Em outras palavras, dois fluidos com a mesma temperatura, quando misturados, resultam em uma mistura com temperatura diferente da inicial, se não houver transferência de calor para o ambiente [3].

Para uma melhor visualização do chamado “calor das misturas”, seguem dois experimentos muito simples que podem facilmente ser repetidos.

#### ✓ **Mistura Exotérmica.**

Para conseguir uma mistura exotérmica, basta adicionar água com hidróxido de sódio ( $\text{H}_2\text{O} + \text{NaOH}$ ). As Figuras 4-8 e 4-9 indicam fotos realizadas usando uma câmera infravermelha e evidenciam o fato da entalpia, em função da concentração não ser uma simples ponderação das entalpias de cada elemento mostrado na Figura 4-7 (entalpia da água brometo de lítio em função da concentração). Ou seja, as misturas não são ideais e, pelo fato de elas ocorrerem, tem-se uma liberação de energia para o meio (exotérmica). Note a Figura 4-10: a mistura após algum tempo de contato foi agitada para homogeneizar a temperatura do copo; ao lado do copo com a mistura existe um outro copo com água representando o estado inicial do fluido. É importante salientar a variação de quase  $30^\circ\text{C}$  apenas com a mistura ( $\text{H}_2\text{O} + \text{NaOH}$ ).

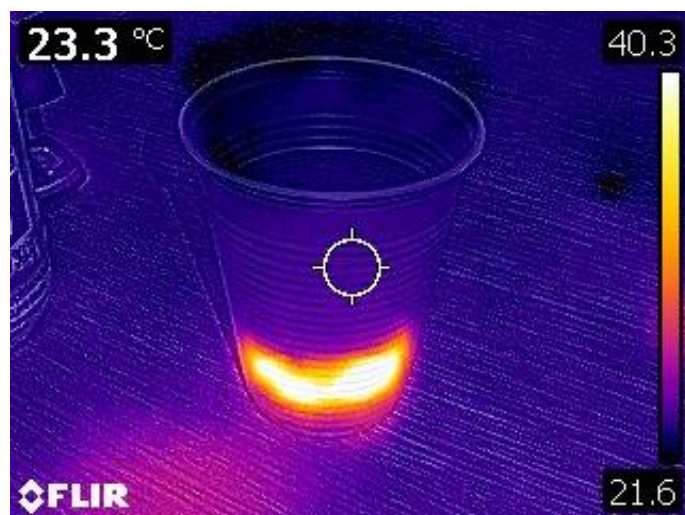


Figura 4-08. Situação térmica logo após a mistura de água e soda cáustica. Fonte: Os autores



Figura 4-9. Situação térmica algum tempo após a mistura de água e soda cáustica. Fonte: Os autores



Figura 4-10. Situação térmica após a agitação da mistura de água e soda cáustica. Fonte: Os autores

#### ✓ Mistura Endotérmica

Para a mistura endotérmica, foram utilizados os seguintes produtos: água e ureia ( $H_2O + CH_4N_2O$ ). O mesmo procedimento foi realizado como indicado nas Figuras 4-11 a 4-13. Observe que, nesse caso, a variação de temperatura não

foi tão expressiva quanto na mistura exotérmica, pois houve uma redução mais tímida de temperatura na ordem de 5°C.



Figura 4-11. Um recipiente com água e outro com ureia antes da mistura. Fonte: Os autores

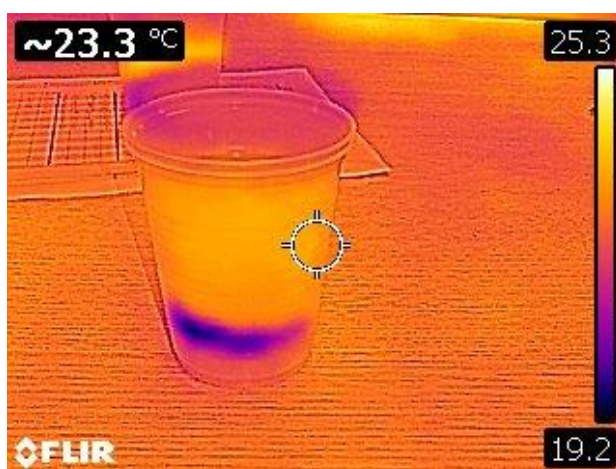


Figura 4-12. Situação térmica logo após a mistura de água e ureia. Fonte: Os autores

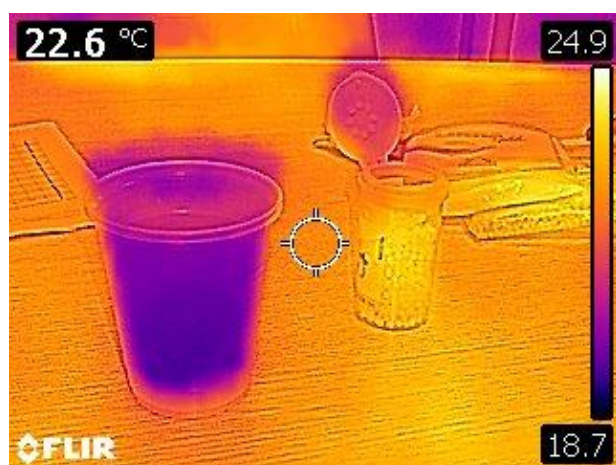


Figura 4-13. Situação térmica após a agitação da mistura de água e ureia. Fonte: Os autores

As Figuras 4-14 e 4.15 indicam as fotos da capa do trabalho com uma comparação entre a mistura e a temperatura da pele (aproximadamente 32°C).



Figura 4-14. Comparação das misturas com a temperatura de uma mão. Fonte: Os autores

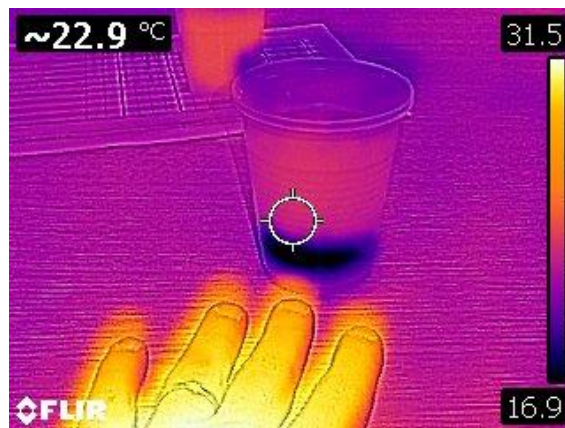


Figura 4-15. Comparação das misturas com a temperatura de uma mão. Fonte: Os autores

#### 4.4 Introdução ao ciclo de refrigeração por absorção

Primeiramente, definiremos dessorção e absorção.

##### ✓ Dessorção

O termo dessorção descreve a geração de vapor de uma fase condensada de uma mistura de um ou mais componentes. Para tal, deve-se ter uma transferência de calor. O termo implica que a fase de vapor terá de forma predominante um componente, enquanto que, numa evaporação, podem existir todos os componentes. Ou seja, dessorção é o processo de evaporar apenas uma fase de uma mistura líquida de mais de um componente [3].

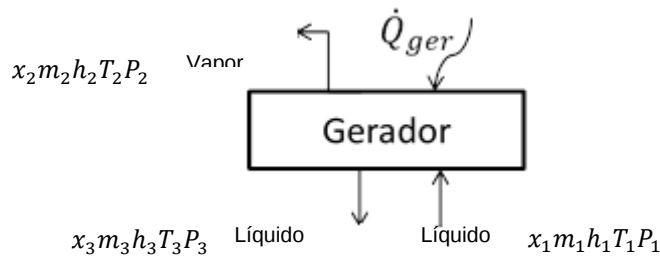


Figura 4-16. Processo de dessorção. Baseado e adaptado de [3]

### ✓ Absorção

O termo absorção descreve a mistura de um vapor em absorvente líquido ou sólido. É similar a condensação no sentido de mudança de fase; no entanto, a absorção implica a existência de uma fase condensada [3].

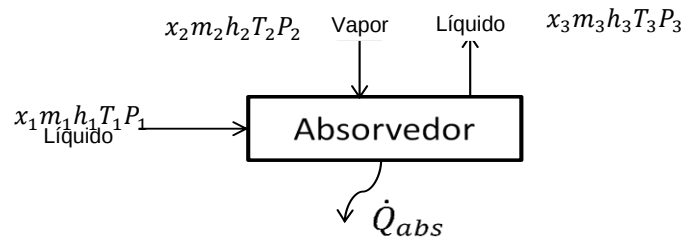


Figura 4-17. Processo de absorção. Baseado e

adaptado de [3]

Para esses processos que envolvem mais de um componente, é muito importante que sejam respeitados o balanço de massa e o balanço de cada espécie. Para uma mistura de dois componentes, basta adicionar o balanço de uma espécie; para três componentes, duas espécies, e assim por diante. Note que, se fizer o balanço global de todas as espécies, haverá uma equação linearmente dependente [3].

Como exemplo, utilizando a Figura 4-9, tem-se:

$$m_1 + m_2 = m_3 \quad 4-17$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_3 x_3 \quad 4-18$$

Agora, usando-se os conceitos de absorção e dessorção, a Figura 10 ilustra o ciclo de refrigeração por absorção, em que se observa que a parte esquerda do ciclo é muito semelhante ao ciclo de refrigeração por compressão de vapor; já a parte direita difere apenas pela substituição de um compressor de vapor pelo sistema de absorção [2,3].

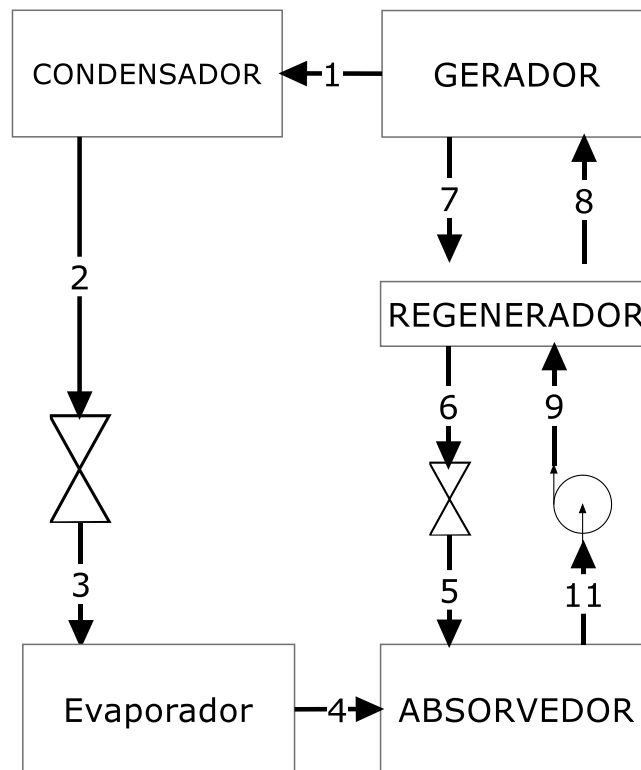


Figura 4-18. Ciclo de refrigeração por absorção, baseado em [2]

O ciclo de refrigeração por absorção tem a grande vantagem de não precisar comprimir vapor, o que faz com que o trabalho da bomba,  $\dot{W}_p$ , seja desprezível. Consequentemente, o gasto de energia elétrica desse ciclo é menor, visto que é bem mais fácil comprimir um líquido do que um gás. Então, por que o ciclo de refrigeração por absorção não é tão comum no nosso dia a dia? Isso se deve ao fato de o ciclo de refrigeração por absorção necessitar de uma fonte de calor para que o fluido de trabalho sofra dessorção. No gerador da Figura 10, o gasto dessa energia seria maior, se viesse de uma fonte que gere custos. Porém, ao aproveitar fontes de calor, como vapor residual de indústrias, esse método se mostra muito mais econômico que a compressão de vapor.

Os fluidos mais comuns para esse tipo de sistema são a solução de água amônia e a solução de água brometo de lítio. A Figura 10 mostra um exemplo típico de água amônia. É muito importante destacar que, quando o fluido de trabalho vaporiza, não existe neste vapor uma concentração significativa de solvente. Para isso, é utilizado um resfriador por refluxo ou retífica para o caso da mistura de água e amônia, como indicado na Figura 4-11.

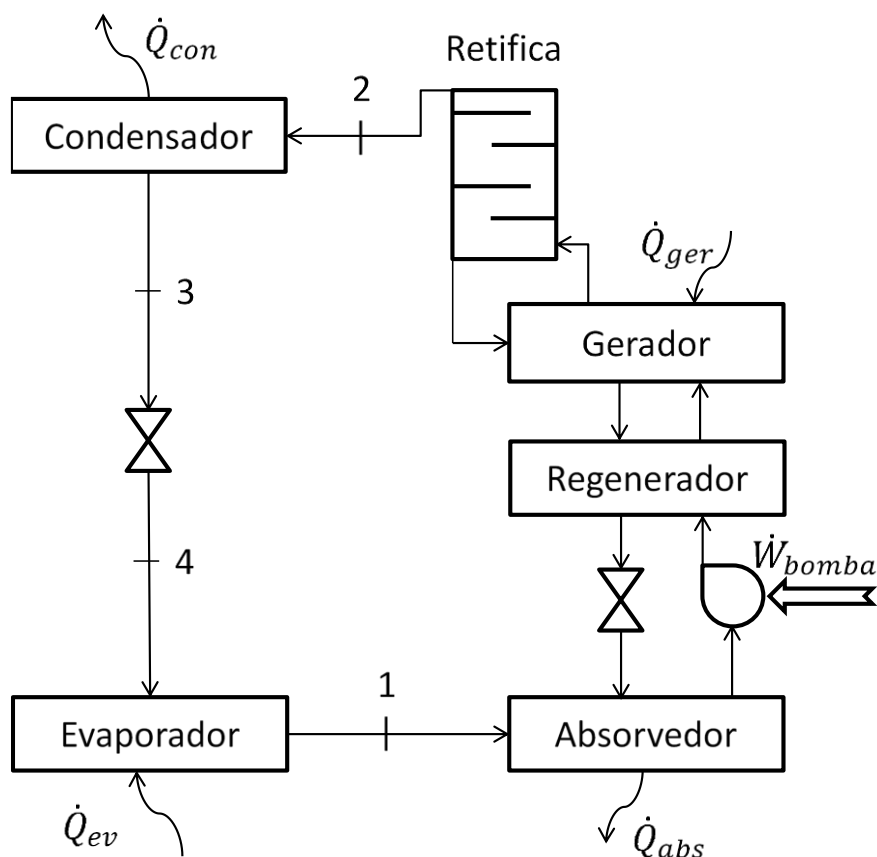


Figura 4-19. Ciclo de Refrigeração por absorção quando o fluido de trabalho é água e amônia. Baseado e adaptado de [2.3]

Caso parte do vapor ainda possua alguma porcentagem de solvente, pode-se fazer um resfriamento como uma tentativa de se diminuir a concentração de amônia em água, por exemplo. Uma importante diferença entre as soluções  $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$  e  $\text{H}_2\text{O-LiBr}$  é o fluido que vai circular pelo condensador e pelo evaporador [3].

No caso de  $\text{H}_2\text{O-LiBr}$ , é a água que vai ser o fluido de trabalho. Desse modo, a solução que retorna do gerador para o absorvedor fica com uma concentração maior de LiBr, quando comparado à solução que entra no gerador [3].

No caso de  $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ , a amônia é que vai ser o fluido de trabalho. Desse modo, a solução que retorna do gerador para o absorvedor fica com uma concentração menor de amônia, se comparada à solução que entra no gerador. Porém para esta solução em especial é necessário que haja uma modificação no ciclo original. Uma retífica é adicionada ao ciclo, entre o gerador e o condensador. O objetivo principal da retífica é eliminar qualquer resíduo de água, evitando-se a formação de gelo em outros componentes, o que poderia danificar o sistema. Pode-se também adicionar um trocador de calor (regenerador) entre o gerador e o absorvedor que permite que a solução forte que entra no gerador seja preaquecida pela solução fraca que deixa o gerador (esse tipo de trocador pode ser usado em qualquer um dos ciclos) [3].

Para maiores informações sobre esse tipo de ciclo, temperaturas de operação, COP, dentre outros, indica-se a apostila SISTEMAS DE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO, proposta por Oliveira-Junior et al. [5].

---

## Referências

- [1] STOECKER, W. V. **Design of Thermal Systems**. 3.ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1989.
- [2] MORAN, M.J.; SHAPIRO, H.N. **Princípios de termodinâmica para engenharia**. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC–Livros Técnicos e Científicos Editora SA, 2009.
- [3] HEROLD, K.E.; RADERMACHER, R.; KLEIN, S. **Absorption chillers and heat pumps**. New York: CRC Press, 2016.
- [4] KLEIN, S. A. **Engineering Equation Solver (EES)**. F-Chart Software, 2017.
- [5] OLIVEIRA JÚNIOR, S.; TRIBESS, A.; HERNANDEZ NETO, A., FIORELLI, F.A. S. **Sistemas de refrigeração por absorção**. São Paulo: USP / Escola Politécnica, 2004. 33p.

# 5 – SISTEMAS DE BOMBEAMENTO

## 5.1 Introdução

Este capítulo aborda o funcionamento de bombas centrífugas de acordo com o sistema nas quais são operadas, assim como a caracterização desse sistema, como a determinação do seu ponto de operação. Foram usados as referências [1-4] para este capítulo

## 5.2 Curva característica de uma bomba

Com o objetivo de se obter a equação de Bernoulli em regime permanente, parte-se do balanço de massa, da análise de Primeira Lei e da análise de Segunda Lei para um volume de controle em regime permanente:

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_s = \dot{m} \quad 5-01$$

$$\frac{dU_{VC}}{dt} = \sum \dot{m}_e \left( h_e + \frac{V_e^2}{2} + gz_e \right) - \sum \dot{m}_s \left( h_s + \frac{V_s^2}{2} + gz_s \right) + \dot{Q}_{VC} - \dot{W}_{VC} \quad 5-02$$

$$\frac{dS_{VC}}{dt} = \sum \dot{m}_e s_e - \sum \dot{m}_s s_s + \frac{\dot{Q}_{VC}}{T_0} + \dot{\sigma} \quad 5-03$$

Pegando-se a Equação 03 e substituindo-a na Equação 02, tem-se:

$$\dot{Q}_{VC} = \dot{m}(s_s - s_e)T_0 - T_0\dot{\sigma} \quad 5-04$$

$$0 = \dot{m} \left[ \left( h_e + \frac{V_e^2}{2} + gz_e \right) - \left( h_s + \frac{V_s^2}{2} + gz_s \right) \right] + \dot{m}(s_s - s_e)T_0 - T_0\dot{\sigma} - \dot{W}_{VC} \quad 5-05$$

$$\dot{W}_{VC} = \dot{m} \left[ \left( h_e - T_0 s_e + \frac{V_e^2}{2} + gz_e \right) - \left( h_s - T_0 s_s + \frac{V_s^2}{2} + gz_s \right) \right] - T_0\dot{\sigma} \quad 5-06$$

Em que  $T_0\dot{\sigma}$  é a taxa de irreversibilidade, também denominada trabalho perdido  $\dot{W}_{perdido}$ , definida como a diferença entre o trabalho reversível (trabalho máximo) e o trabalho real, ou:

$$\dot{W}_{real} = \dot{W}_{max} - \dot{W}_{perdido} \quad 5-07$$

Para fluidos incompressíveis:

$$Tds = dh - vdp \quad 5-08$$

Integrando-se 5-08 e a  $T = T_0$ , tem-se:

$$v\Delta p = \Delta h - T_0\Delta s \quad 5-09$$

$$v(p_e - p_s) = h_e - h_s - T_0(s_e - s_s) \quad 5-10$$

$$\dot{W}_{VC} = \dot{m} \left[ v(p_e - p_s) + \frac{V_e^2 - V_s^2}{2} + g(z_e - z_s) \right] - T_0\dot{\sigma} \quad 5-11$$

Num processo reversível com uma entrada e uma saída, sem realização de trabalho, e com  $\dot{\sigma} = 0$ , pode-se chegar na Equação 5-12. Tal equação é chamada de equação de Bernoulli.

$$\frac{p_e - p_s}{\rho} + \frac{V_e^2 - V_s^2}{2} + g(z_e - z_s) = 0 \quad 5-12$$

Voltando para o processo de uma bomba real,

$$\dot{W}_{bomba,VC} = \dot{m} \left[ \frac{p_e - p_s}{\rho} + \frac{V_e^2 - V_s^2}{2} + g(z_e - z_s) \right] - T_0\dot{\sigma} \quad 5-13$$

Usando-se os termos da Equação 5-13 de forma ao trabalho da bomba ser positivo, chega-se na Equação 5-14.

$$|\dot{W}_{bomba,VC}| = \dot{m} \left[ \frac{p_s - p_e}{\rho} + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] - T_0\dot{\sigma} \quad 5-14$$

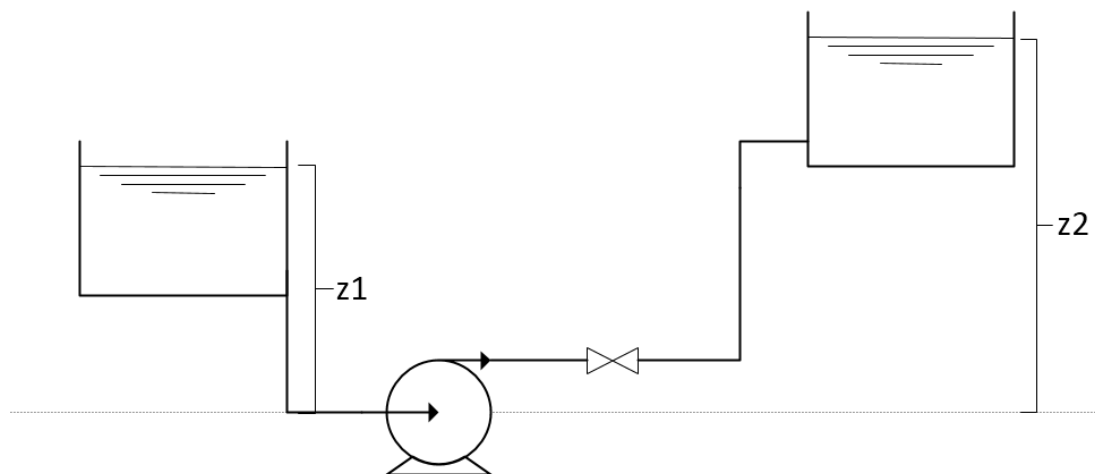
$$\frac{\dot{W}_{bomba}}{\dot{m}g} = \frac{p_s - p_e}{\rho g} + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2g} + (z_s - z_e) - \frac{T_0\dot{\sigma}}{\dot{m}g} \quad 5-15$$

Em que  $T_0\dot{\sigma}$  é o trabalho perdido na bomba. Este termo relaciona-se com Mecânica dos Fluidos de forma que é composto de perdas de carga locais e distribuídas. É importante salientar que o restante da Equação 5-15 refere-se ao trabalho ideal, ou máximo trabalho:  $\frac{\dot{W}_{bomba}}{\dot{m}g} = \frac{p_s - p_e}{\rho g} + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2g} + (z_s - z_e)$ . Um último ponto a se comentar é que as unidades da potência executada pela bomba, quando dividida pela vazão mássica e aceleração da gravidade passa a ser em metros, i.e., uma unidade de fácil medição e usual em hidráulica.

### 5.3 Perdas de Carga Locais e Distribuídas

A instalação de uma bomba centrífuga deve ser bem estudada para se obter a curva característica do sistema, e com isso o ponto de operação da máquina (Figura 5-1).

As perdas totais de energia ou altura manométrica no sistema podem ser divididas em duas categorias [2].



**Figura 5-1. Instalação de bomba centrífuga entre dois reservatórios. Baseado em [2]**

Perdas Locais resultam de efeitos localizados como mudanças repentinas de área transversal, válvulas, juntas e outros efeitos pontuais é descrita:

$$\sum \frac{K_i V^2}{2g} \quad 5-16$$

Em que K é o coeficiente de perda localizada, que deve ser determinado experimentalmente para cada instância de perda.

As perdas de carga distribuídas resultam do efeito do atrito no escoamento plenamente desenvolvido em tubulações com área da seção transversal constante.

$$\frac{fL}{D} \frac{V^2}{2g} \quad 5-17$$

Alguns tipos de perdas localizadas podem ser traduzidos em comprimentos equivalentes  $L_e$  de tubulação sob um certo fator de atrito  $f$ . Nesse caso, utiliza-se a Eq. 5-17 substituindo-se L por  $L_e$ .

Com o aumento do comprimento da tubulação, aumenta-se a área em atrito com o fluido, e, portanto, as perdas de energia por esse efeito. Já com o aumento do diâmetro da tubulação, tais perdas são atenuadas devido à maior razão entre a quantidade de fluido atravessando uma seção da tubulação e sua área de contato que atrita com a tubulação.

Por serem termos ligados ao componente quadrático da equação da altura manométrica em função da vazão de fluido, um aumento das perdas provoca uma acentuação da curva característica do sistema (ela cresce mais rapidamente), e vice-versa.

Assim:

$$\frac{\dot{W}_{bomba}}{\dot{m}g} = H_{bomba} = \frac{p_s - p_e}{\rho g} + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2g} + z_s - z_e - \left( \sum \frac{K_i V^2}{2g} + \frac{fL}{D} \frac{V^2}{2g} \right) \quad 5-18$$

A eficiência de uma bomba centrífuga é dada pela razão entre o trabalho real que ela exerce sobre o fluido, dado pelo produto entre a vazão mássica, altura manométrica total fornecida  $H_p$  e a aceleração da gravidade  $g$  e o trabalho fornecido à bomba [2].

$$\eta = \frac{\dot{W}_{real}}{\dot{W}_{fornecido}} = \frac{\dot{m}gH_p}{\dot{W}_{fornecido}} = \frac{\rho g \dot{V} H_p}{\dot{W}_{fornecido}} \quad 5-19$$

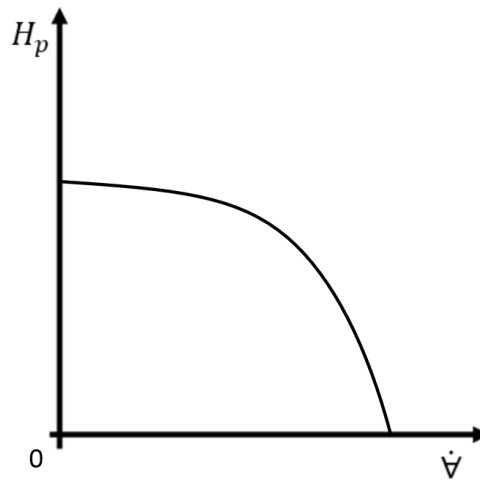


Figura 5-2. Curva característica de uma bomba centrífuga. Baseado em [2]

O ponto em que  $\dot{V} = 0$  corresponde à altura manométrica necessária para se manter a capacidade da bomba. Já o ponto em que  $H_p = 0$  é onde o fluido passaria pela bomba como se a mesma fosse apenas um duto [2].

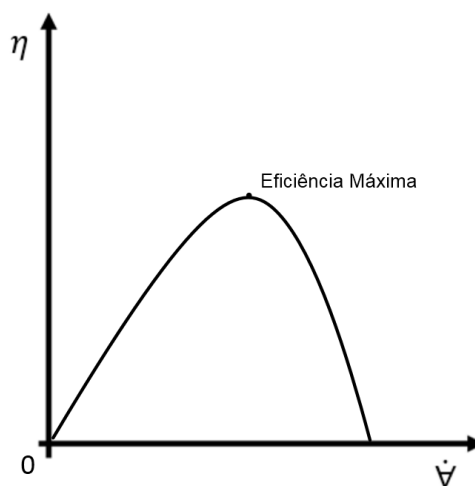


Figura 5-3. Rendimento. Baseado em [2]

## 5.4 Curva Característica de um Sistema

A curva característica de um sistema é em geral uma curva de perdas de carga quadrática que varia com a vazão de fluido pela sua instalação. A instalação em que uma bomba centrífuga deve funcionar deve ser analisada para se estimar a curva do sistema que definirá o ponto de operação da bomba e se a mesma pode ou não ser utilizada nessa instalação [2].

$$H_p = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{V_2 - V_1}{2g} + z_2 - z_1 + \left( \frac{fL}{D} + \sum_i k_i \right) \frac{V^2}{2g} \quad 5-20$$

No caso da Figura 5-1 calcula-se a curva característica do sistema conforme a Equação 5-21 [2].

$$H_p = z_2 - z_1 + \left( \frac{fL}{D} + \sum_i k_i \right) \frac{V^2}{2g} \quad 5-21$$

A bomba deve vencer a diferença de altura e as perdas locais e distribuídas da tubulação.

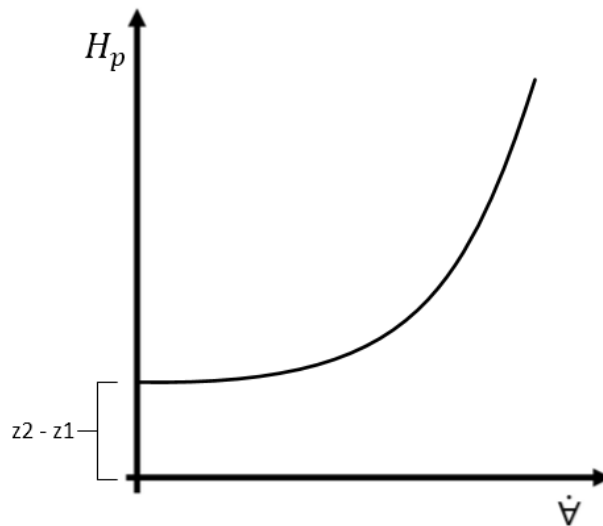


Figura 5-4. Curva característica do sistema. Baseado em [2]

## 5.5 Associações de bombas em série e em paralelo

A associação em série é utilizada para aumentar a altura manométrica total de uma instalação. Considere duas bombas que fornecem altura manométrica  $H_A$  e  $H_B$  e são associadas em série [1].

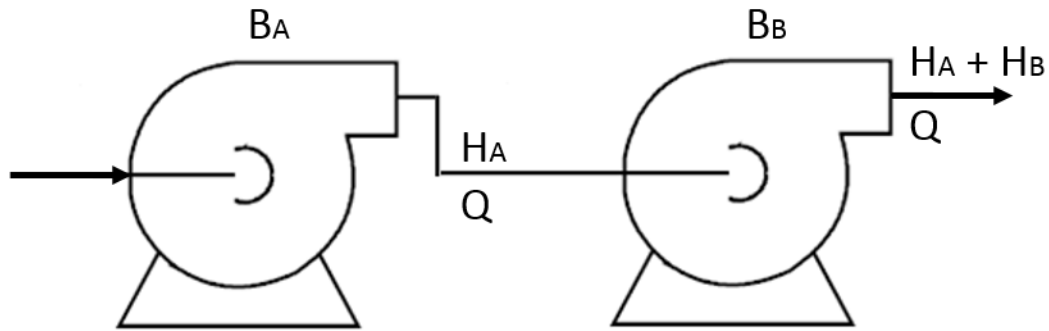


Figura 5-5. Associação das bombas em série [2].

Para uma dada vazão volumétrica  $Q$  que o conjunto fornece a altura manométrica resultante é a soma da altura manométrica individual fornecida por cada bomba. Devido ao sistema estar em regime permanente, ambas as bombas devem fornecer a mesma vazão  $Q$ .

$$H_{série} = H_A + H_B \quad 5-22$$

$$Q_{série} = Q_A = Q_B \quad 5-22$$

Em associações em paralelo, por sua vez, emprega-se preferencialmente bombas iguais de forma a aumentar a vazão em um sistema mantendo-se a mesma altura manométrica. Se um aumento da vazão requisitada de uma bomba centrífuga pode fazer com que a mesma opere muito longe do seu ponto de maior eficiência, pode-se empregar outra bomba em paralelo para que as duas operem mais próximo do seu ponto de maior eficiência (esse exemplo será motivação do Capítulo 6). Ajustes da vazão podem ser feitos desativando uma ou mais bombas da associação em paralelo.

## 5.6 NPSH e Cavitação

O NPSH (*Net positive suction head*, ou altura positiva líquida de sucção) é uma grandeza que representa a diferença entre a energia total absoluta na sucção e a energia da pressão de vaporização do fluido como uma altura manométrica. O NPSH disponível na sucção da bomba, portanto, é dado como:

$$NPSH_D = \left( \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} \right) - \frac{p_{sat}}{\rho g} \quad 5-22$$

Onde:

$p_s$  = pressão na sucção da bomba.

$p_v$  = Pressão de vaporização do fluido.

$V_s$  = Velocidade média do fluido na sucção.

A altura manométrica  $H_s (p_s / \rho g)$  na sucção pode ser calculada substituindo-se o ponto 2 pelo ponto s, da sucção, na Eq. 20, e considerando-se que a bomba ainda não

realizou trabalho sobre o fluido ( $H_p = 0$ ) visto que o ponto s está imediatamente antes da sua entrada:

$$0 = \frac{P_s - P_1}{\rho g} + \frac{V_s - V_1}{2g} + z_s - z_1 + \left( \frac{fL}{D} + \sum_i k_i \right) \frac{V^2}{2g} \quad 5-23$$

Rearranjando-se a equação, tem-se:

$$H_s = \frac{P_s}{\rho g} = \frac{P_1}{\rho g} - \frac{V_s - V_1}{2g} - z_s + z_1 - \left( \frac{fL}{D} + \sum_i k_i \right) \frac{V^2}{2g} \quad 5-24$$

Por fim, para o caso de um reservatório de fluido aberto no ponto 1 considera-se na sua superfície  $V_1 = 0$  e  $p_1 = p_{atm}$ . Sendo a tubulação de entrada de diâmetro uniforme até a sucção,  $V = V_s$ . Simplificando a equação:

$$H_s = \frac{p_1}{\rho g} - z_s + z_1 - \left( \frac{fL}{D} + \sum_i k_i + 1 \right) \frac{V_s^2}{2g} \quad 5-25$$

O NPSH requerido, ou  $NPSH_R$  de uma bomba define a altura manométrica total na sucção necessária para que a bomba opere sob condições definidas de cavitação.

Devido à natureza do processo de cavitação e da geometria variável por onde o fluido passa ao ser bombeado, a obtenção do  $NPSH_R$  de uma bomba é experimental. Ela depende das suas condições de operação e é dada por meio de critérios de cavitação. Sem um critério de cavitação como base de comparação, o  $NPSH_R$  de uma bomba a princípio não fornece informação útil. Quando não mencionado, assume-se que o critério de cavitação é, portanto, o  $NPSH_3$ . Esse critério, um dos critérios mais utilizados na indústria por sua maior facilidade de medição é utilizado para se medir o NPSH quando há uma queda de 3% na altura manométrica total da bomba. Neste momento, o  $NPSH_R$  de uma bomba a uma dada condição de operação é definido como  $NPSH_D$  do sistema na qual ela está instalada, calculado no momento e condições que em ocorre a queda especificada na altura manométrica da bomba.

Como é desejável para o bom funcionamento a longo-prazo da bomba que se evite sua operação próximo da condição de cavitação, o  $NPSH_D$  do sistema deve ser maior que o  $NPSH_R$  da bomba de forma que a altura manométrica total em qualquer ponto dentro da voluta seja maior que a altura manométrica equivalente à pressão de vapor do fluido bombeado.

$$NPSH_D (sistema) > NPSH_R (bomba) \quad 5-24$$

Para isso, estabelece-se uma margem de segurança adequada para evitar perdas de desempenho, barulho, vibrações e até erosão por cavitação. Ela pode depender do material utilizado na construção da bomba, do seu tamanho, das suas condições de operação e das características do fluido e da temperatura na qual é bombeado. Ela é calculada com base no  $NPSH_R$  calculado no ponto de operação de melhor eficiência

da bomba, em volta do qual a mesma deve operar o mais próximo possível para se evitar perdas.

$$S_A = \frac{NPSH_D}{NPSH_R \text{ no ponto de maior eficiência}} \quad 5-25$$

---

## Referências

- [1] PRITCHARD, P. J. **Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics**. 8ª. ed. John Wiley & Sons, 2010.
- [2] PENONCELLO, S. G. **Thermal Energy Systems: Design and Analysis**. CRC Press, 2015.
- [3] ALÉ, J. A. V. **Sistemas Fluidomecânicos: Sistemas de Bombeamento**. PUCRS, Porto Alegre, 2011.
- [4] SULZER PUMPS LTD. **Centrifugal Pump Handbook**. 3ª. Ed. Elsevier, 2010.

# 6 - SIMULAÇÃO DE SISTEMAS

## 6.1 Definição

Sistemas termodinâmicos e hidráulicos são conjuntos de componentes cujos parâmetros de desempenho são inter-relacionados (ou seja, são conectados de tal forma que a informação de saída de um componente é usada como entrada do próximo).

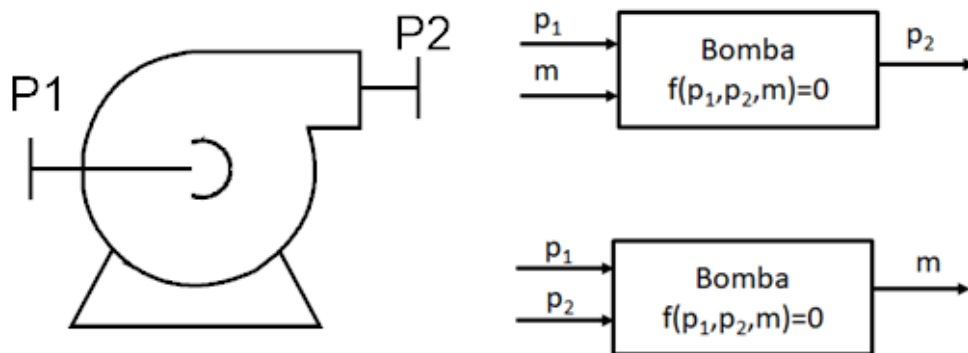
Para simular sistemas, é necessário obter informações do comportamento de um componente real (por exemplo, curva característica de um compressor, eficiência isentrópica, dentre outros), com base em observações, análises e estudos vários. Desse modo, é possível descrever o sistema global real na forma de equações dependentes dos parâmetros de desempenho e propriedades termofísicas. Estes parâmetros podem ser: pressão, temperatura, vazão e transferência de energia. Salienta-se que este texto é baseado principalmente na referência [1].

## 6.2 Diagrama de fluxo de informação ou diagrama de blocos.

O primeiro passo para a simulação de um sistema é fazer um diagrama com o fluxo de informações do sistema, utilizando-se do diagrama de blocos. Tal diagrama consiste em diferentes entradas e uma saída. As entradas são as variáveis conhecidas ou previamente admitidas.

Em regime permanente, o diagrama de blocos comporta-se como uma equação algébrica, enquanto que, em um sistema de controle (ou sistemas térmicos em regime transiente), representa uma função de transferência. Tais blocos, quando conectados, podem ser considerados como um sistema de equações diferenciais, enquanto em regime permanente os blocos representam um sistema de equações algébricas (linear ou não linear).

Em cada bloco do diagrama, é colocada uma equação que representa a relação entre as variáveis de entrada e saída. De modo geral, os blocos do diagrama representam as transformações que ocorrem no sistema, ou mesmo os equipamentos reais. A Figura 1 indica uma bomba e dois possíveis blocos que representam tal sistema - concepção semelhante ao fluxograma de processo em que cada componente é substituído por um bloco. Coloca-se a equação que expressa a relação entre as variáveis de entrada e saída desse bloco, na forma:  $f(\text{entradas}, \text{saídas})=0$ . No primeiro caso, tem-se que as entradas são pressão e vazão mássica, enquanto no segundo caso, tem-se apenas as pressões como entrada. Novamente, destaca-se a existência de apenas uma saída.



**Figura 6-1. Diagrama de blocos de uma bomba centrífuga atuando em um fluido incompressível, por exemplo, água. Baseado em [1] e [3]**

É importante salientar que cada diagrama corresponde a uma equação, isto é, pode haver várias entradas, porém apenas uma saída (solução).

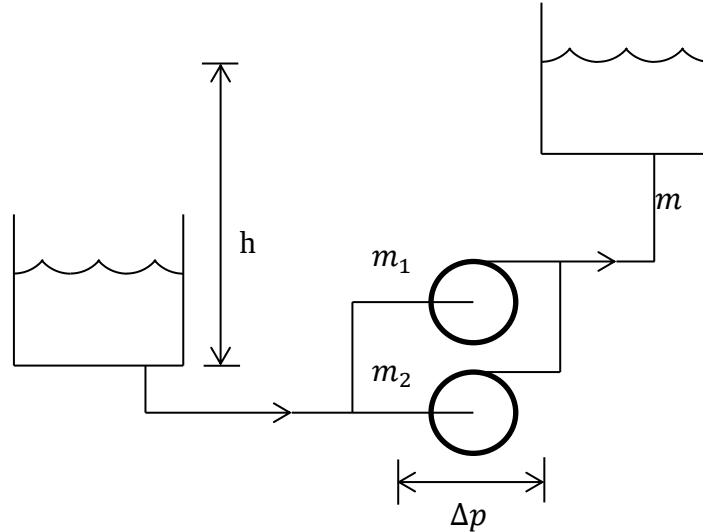
### Métodos para simulação

Uma vez estabelecido o modelo de diagrama de blocos, deve-se utilizar um método matemático ou numérico apropriado para implementar um código computacional de simulação, ou seja, deve-se resolver o sistema de equações não lineares. Destaca-se que com um código pronto é possível não só descrever o sistema para condição de projeto, mas sim, escrever um programa com capacidade de prever comportamento em situações fora dessa região, desde que esteja dentro da região de validade das interpolações e hipóteses simplificadoras.

### 6.3 Método das aproximações sucessivas

O Problema de simulação, usando o método das substituições sucessivas, é resolvido assumindo um valor para uma ou mais variáveis independentes e avaliando a função (ou conjunto de funções) até que o valor da primeira variável seja obtido novamente. Dessa maneira, torna-se possível resolver a equação ou sistemas de equações. Deve-se destacar que um cuidado a se tomar é a convergência nesse método que deve satisfazer alguns critérios. Nesse ponto, o leitor deve procurar na literatura especializada alguns critérios de convergência para esse sistema [4].

Como exemplo tem-se o seguinte sistema de bombeamento em paralelo, entre duas caixas de água.



**Figura 6-2. Sistema de bombeamento de água envolvendo duas bombas em paralelo e duas caixas de água abertas para o ambiente, modificado de [1]**

Esse sistema é descrito pelas Equações (1) a (4), mais:

$$\Delta p(\text{kPa}) = 810 - 25m_1 - 3,75(m_1)^2 \quad 6-01$$

$$\Delta p(\text{kPa}) = 900 - 65m_2 - 30(m_2)^2 \quad 6-02$$

$$\Delta p(\text{kPa}) = 7,2m^2 + \rho gh = 7,2m^2 + 1000 * 9,807 * 40/1000 \quad 6-03$$

$$m = m_1 + m_2 \quad 6-04$$

Deve-se destacar que as Equações 6-1 e 6-2 são interpolações da curva característica fornecida pelo fabricante. Já a Equação 6-3 se refere à Equação da Energia, levando-se em consideração que a unidade dela ao invés de [m] como tradicionalmente é obtida  $H_{\text{bomba}} [\text{m}] = f(Q [\text{l/s}])$  está em  $\Delta p_{\text{bomba}} [\text{kPa}] = f(m [\text{kg/s}])$ . A Equação 6-4, por sua vez, é a Equação da Continuidade na forma simplificada, ou seja, a conservação da massa ou balanço de massa. Para maiores informações sugere-se ao leitor o capítulo de Sistemas de Bombeamentos.

Para simular esse sistema, é necessário escrever as funções de modo que elas sejam iguais a zero. Ou seja, como nas Equações 6-5 a 6-8.

$$f_1 = 810 - 25m_1 - 3,75(m_1)^2 - \Delta p = 0 \quad 6-05$$

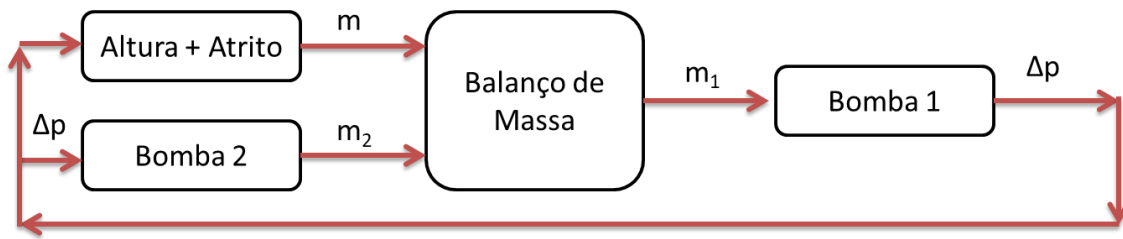
$$f_2 = 900 - 65m_2 - 30(m_2)^2 - \Delta p = 0 \quad 6-06$$

$$f_3 = 7,2m^2 + 39,228 - \Delta p = 0 \quad 6-07$$

$$f_4 = m_1 + m_2 - m = 0 \quad 6-08$$

Lembrando dos diagramas de blocos, cada equação é representada por um diagrama, sendo necessário escolher o valor inicial de uma das variáveis. Nota-se que para cada

função pode haver mais de uma entrada, porém só há uma saída. A Figura 3 indica um possível arranjo do diagrama para o sistema da Figura 2.



**Figura 6-3. Arranjo do diagrama de blocos representando o sistema de bombeamento da Figura 2, modificado de [1]**

Para utilizar esse método, é preciso um valor inicial - neste caso, foi usado  $m_1=4,2$  kg/s. O primeiro bloco a ser resolvido é a Equação da bomba 1, que retornará a diferença de Pressão Fornecida (ou trabalho de elevação). Após a tentativa inicial, os outros parâmetros são calculados na sequência até que o parâmetro do chute inicial seja atualizado. Essa simulação ocorre várias vezes até encontrar um valor satisfatório (quem define o critério de parada é o próprio programador).

Como exemplificação dos primeiros passos, a primeira iteração será mostrada das Equações 6-9 a 6-15

Sabe-se que:

$$m_1 = 4,2 \text{ kg/s} \quad 6-09$$

Substituindo na equação  $f_1$ :

$$f_1 = 810 - 25 * 4,2 - 3,75 * (4,2)^2 - \Delta p = 0 \quad 6-10$$

E encontra-se que:

$$\Delta p = 638,9 \text{ kPa} \quad 6-11$$

Com o valor de  $\Delta p$  encontrado substitui-se os valores em  $f_2$  e  $f_3$ :

$$f_2 = 900 - 65m_2 - 30(m_2)^2 - 638,9 = 0 \quad 6-12$$

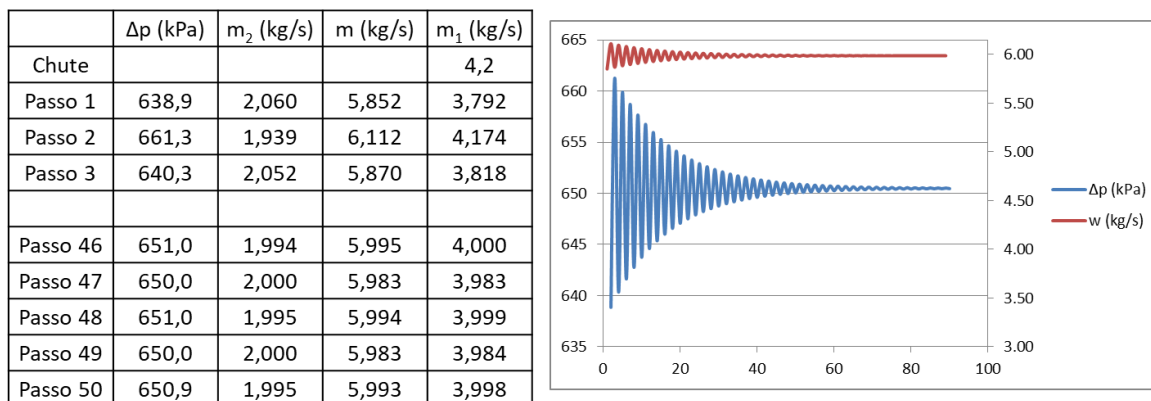
$$f_3 = 7,2m^2 + 39,228 - 638,9 = 0 \quad 6-13$$

Encontrando, assim, os seguintes valores:

$$m_1 = 2,06 \text{ kg/s} \quad 6-14$$

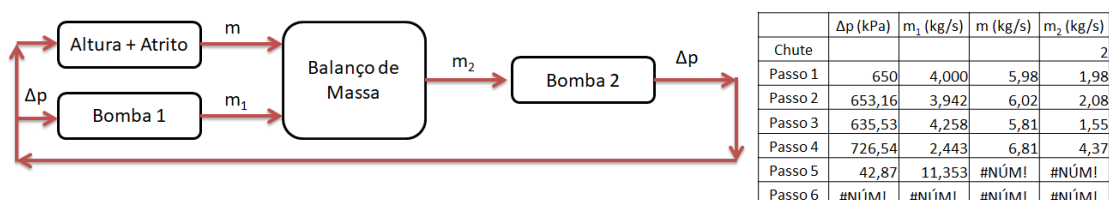
$$m = 5,852 \text{ kg/s} \quad 6-15$$

E, por fim, o último passo é atualizar o valor de  $m$  com a função  $f_4$ , encontrando  $m_1 = 3,792$  kg/s, e assim, se inicia a nova iteração. A Figura 4 indica como a convergência ocorre. A tabela mostra todas as variáveis, enquanto o gráfico indica  $\Delta p$  [kPa] (em azul e eixo principal) e  $m$  [kg/s] (em vermelho e eixo secundário)



**Figura 6-4 - Resposta do método das aproximações sucessivas, usando-se como diagrama de blocos o esquema da Figura 3, modificado de [1]**

O método das substituições sucessivas é muito utilizado pelo baixo custo computacional, porém é um método bastante instável, pois necessita de um chute inicial muito bom, além de o sistema ter de seguir alguns critérios de convergência, como mostrado na Figura 5. Mudando-se a bomba 1 com a 2 no diagrama de bloco e, se em vez de iniciar o método com um valor inicial de  $m_1 = 4,2$  kg/s, utilizasse um valor de  $m_2 = 2$  kg/s, que é muito próximo da resposta do sistema, mesmo assim o sistema poderia divergir. Veja a tabela.



**Figura 6-05: Resposta do método das aproximações sucessivas, usando-se como diagrama de blocos modificado, modificado de [1]**

## 6.4 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é descrito basicamente pela seguinte Equação (16), na qual  $n$  é a iteração, e o valor  $x_n$ ,  $f(x_n)$  e  $f'(x_n)$  refere-se ao valor da função no passo em questão.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad 6-16$$

A base do método Newton-Raphson pode ser obtida, tendo por base a expansão da série de Taylor para uma função  $f(x)$ , em que se considera apenas a primeira derivada, como mostrado na Equação 18:

Série de Taylor.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a) * (x-a) + \frac{f''(a)}{2} * (x-a)^2 + \dots \quad 6-17$$

Considerando até o termo de primeira ordem (ou primeira derivada) um, tem-se:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0) \quad 6-18$$

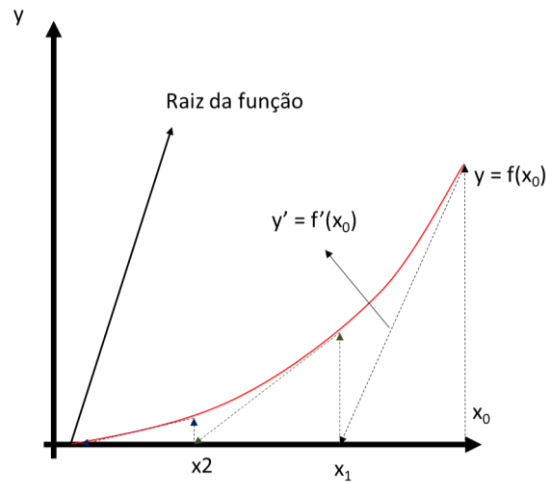
Como se espera encontrar o ponto no qual o  $f(x) = 0$  (conforme o diagrama de blocos), tem-se que:  $f(x) = 0$ , e destaca-se que o  $x_0$  refere-se ao valor inicial escolhido por quem está resolvendo a equação.

- $f(x_0)$  = o valor da função no ponto  $x_0$
- $f'(x_0)$  = derivada na função no ponto  $x_0$
- $x_1$  = valor desejado

De modo que obtemos novamente a expressão:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad 6-19$$

O gráfico abaixo mostra o comportamento do método de Newton-Raphson durante sua execução. Nota-se que ele calcula o valor de  $x_1$ , isto é, a partir da tangente no ponto do valor inicial. Usando termos coloquiais, ao invés de simplesmente chutar o próximo valor da função, “mira-se” o próximo chute baseando-se na tangente na função do ponto inicial. Nota-se que a equação será resolvida, quando a função  $y=f(x_n)$  cruzar o eixo  $x$ .



**Figura 6-6 Representação esquemática do método de Newton – Raphson.**

Como exemplo, pode-se destacar uma equação do segundo grau:  $f(x) = x^2 - 3x - 10 = 0$ . Usando a equação de Bhaskara:  $\Delta = b^2 - 4ac$  e  $x = (-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}) / (2a)$ , encontram-se duas raízes. São elas:  $x = -2$  e  $x = 5$ .

Agora, usando o método de Newton-Raphson, pode-se chegar à Equação 6-20:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x^2 - 3x - 10}{2x - 3} \quad 6-20$$

Usando-se como valor inicial  $x_0 = 10$ , encontra-se  $x_1 = 6,471$  (indicado em vermelho na Tabela 1) que será o valor inicial para a próxima iteração (em azul na Tabela 1):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 10 - \frac{10^2 - 3 \cdot 10 - 10}{2 \cdot 10 - 3} = 6,470 \quad 6-21$$

A Tabela 1 indica os resultados da avaliação, usando o método de Newton. Nota-se que após poucas iterações chegou-se ao valor desejado. Quem determina o critério de parada é o usuário. Note que o valor de  $f(x)$  se tornou zero quando  $x$  se aproximou da solução.

**Tabela 6-1. Aplicação do método de Newton-Raphson para uma variável.**

|   | $x_n$  | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ | $x_{n+1}$ |
|---|--------|----------|-----------|-----------|
| 1 | 10,000 | 60,00    | 17,00     | 6,471     |
| 2 | 6,471  | 12,46    | 9,94      | 5,218     |
| 3 | 5,218  | 1,57     | 7,44      | 5,006     |
| 4 | 5,006  | 0,04     | 7,01      | 5,000     |
| 5 | 5,000  | 0,00     | 7,00      | 5,000     |
| 6 | 5,000  | 0,00     | 7,00      | 5,000     |
| 7 | 5,000  | 0,00     | 7,00      | 5,000     |
| 8 | 5,000  | 0,00     | 7,00      | 5,000     |

Aqui, surge uma dúvida: e a outra raiz? Então, foi realizado o mesmo procedimento, desta vez para um “chute” inicial de -10. O sistema convergiu para 2.

**Tabela 6-2. Aplicação do método de Newton-Raphson para uma variável.**

|          | x <sub>n</sub> | f(x <sub>n</sub> ) | f'(x <sub>n</sub> ) | X <sub>n+1</sub> |
|----------|----------------|--------------------|---------------------|------------------|
| <b>1</b> | -10,000        | 120,00             | -23,00              | <b>-4,783</b>    |
| <b>2</b> | <b>-4,783</b>  | 27,22              | -12,57              | -2,616           |
| <b>3</b> | -2,616         | 4,69               | -8,23               | -2,046           |
| <b>4</b> | -2,046         | 0,33               | -7,09               | -2,000           |
| <b>5</b> | -2,000         | 0,00               | -7,00               | -2,000           |
| <b>6</b> | -2,000         | 0,00               | -7,00               | -2,000           |
| <b>7</b> | -2,000         | 0,00               | -7,00               | -2,000           |
| <b>8</b> | -2,000         | 0,00               | -7,00               | -2,000           |

O leitor, neste ponto, deve perguntar: qual raiz é a correta em um problema físico? Geralmente, podemos sempre eliminar essas raízes pela lógica do problema, por exemplo, se x for massa, jamais poderá ser negativo. Sempre haverá restrição física para descartar algumas raízes. Concentração de brometo de lítio em água, por exemplo, jamais poderá ser maior do que 1 ou menor do que zero. **Um cuidado importante a se tomar é que o método não identifica que está em um falso mínimo.**

### 6.5 Método de Newton-Raphson para sistemas de equação

Dado um sistema de três equações e três incógnitas, como mostrado no sistema representado pelas Equações 5-22 a 5-24:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad 6-22$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad 6-23$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad 6-24$$

Para o sistema de equação, é necessário trabalhar com matrizes. Desta forma, o método fica de acordo com a Equação 5-25:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1,0} \\ x_2 - x_{2,0} \\ x_3 - x_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(x_{1,0}; x_{2,0}; x_{3,0}) \\ -f_2(x_{1,0}; x_{2,0}; x_{3,0}) \\ -f_3(x_{1,0}; x_{2,0}; x_{3,0}) \end{bmatrix} \quad 6-25$$

Para exemplificar o método, pode-se resolver o sistema de Equações obtido da Figura 2. Como **primeiro passo**, devem-se encontrar as funções que descrevem o problema,

já obtidas nas Equações 5-5 a 5-8 e mostradas novamente como 5-26 a 5-30. A fim de ajudar na visualização da aplicação do método [1].

$$f_1 = 810 - 25m_1 - 3,75(m_1)^2 - \Delta p = 0 \quad 6-26$$

$$f_2 = 900 - 65m_2 - 30(m_2)^2 - \Delta p = 0 \quad 6-27$$

$$f_3 = 7,2m^2 + 39,228 - \Delta p = 0 \quad 6-28$$

$$f_4 = m_1 + m_2 - m = 0 \quad 6-29$$

**Segundo passo:** Calcular a matriz jacobiana do sistema, para poder aplicar as derivadas no ponto da iteração, ou seja, o que seria o equivalente à reta tangente no sistema simples. Tal resultado pode ser visto na Figura 7 [1].

**Tabela 6-3 Derivadas das funções para montar a matriz jacobiana.**

|                                              |                                                   |                                          |                                            |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\frac{\partial f_1}{\partial \Delta p} = 1$ | $\frac{\partial f_1}{\partial w_1} = 0$           | $\frac{\partial f_1}{\partial w_2} = 0$  | $\frac{\partial f_1}{\partial w} = -14,4w$ |
| $\frac{\partial f_2}{\partial \Delta p} = 1$ | $\frac{\partial f_2}{\partial w_1} = 25 + 7,5w_1$ | $\frac{\partial f_2}{\partial w_2} = 0$  | $\frac{\partial f_2}{\partial w} = 0$      |
| $\frac{\partial f_3}{\partial \Delta p} = 1$ | $\frac{\partial f_3}{\partial w_1} = 0$           | $\frac{\partial f_3}{\partial w_2} = -1$ | $\frac{\partial f_3}{\partial w} = 0$      |
| $\frac{\partial f_4}{\partial \Delta p} = 0$ | $\frac{\partial f_4}{\partial w_1} = -1$          | $\frac{\partial f_4}{\partial w_2} = -1$ | $\frac{\partial f_4}{\partial w} = 1$      |

**Terceiro passo:** Escolher os valores iniciais das variáveis e encontrar os valores das funções do sistema:  $\Delta p = 750$  kPa;  $m_1 = 3$  kg/s  $m_2 = 1,5$  kg/s e  $m = 5$ . A partir desse passo, encontram-se os valores de  $f_i$ , conforme a Tabela 6-4.

**Tabela 6-04. Valores das funções no passo inicial[1].**

|           |       |
|-----------|-------|
| <b>f1</b> | 177,7 |
| <b>f2</b> | 48,8  |
| <b>f3</b> | 15,0  |
| <b>f4</b> | 0,5   |

**Quarto passo:** Calcular os novos valores das variáveis e atualizar os valores das funções. Nota-se que se deve inverter a matriz, encontrando os valores de  $x_i$ , e assim, poder repetir o processo do método de Newton-Raphson até que os valores das funções sejam menores que um critério de convergência pré-determinado. Caso o sistema não convirja, é necessário alterar os chutes iniciais e repetir o processo. Isso ocorre porque o método de Newton-Raphson tem algumas limitações que são falsos mínimos, descontinuidades e singularidades. A Tabela 4 mostra o desenvolvimento do sistema, conforme as interações acontecem [1].

**Tabela 6-05. Valores do método de Newton-Raphson[1].**

| Iter. | $f_1$  | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $\Delta p$ | $m_1$ | $m_2$ | $m$   |
|-------|--------|-------|-------|-------|------------|-------|-------|-------|
| 1º    | -8,681 | 4,170 | 8,778 | 0,00  | 651,16     | 4,055 | 2,041 | 6,096 |
| 2º    | -0,081 | 0,015 | 0,056 | 0,00  | 650,48     | 3,992 | 1,998 | 5,989 |
| 3º    | 0,000  | 0,000 | 0,000 | 0,00  | 650,49     | 3,991 | 1,997 | 5,988 |

## 6.6 Exemplo proposto pela turma de EM984 2º semestre de 2017

```
clear all
clc
x = [500; 2.2; 1.8; 2.5]; %chute inicial
xant = [0;0;0;0];
eps = 1e-6;
for i = 1:100
    f1(i) = x(1) - 7.2*x(2)^2 - 392.28;
    f2(i) = x(1) - 810 + 25*x(3) + 3.75*x(3)^2;
    f3(i) = x(1) - 900 + 65*x(4) + 30*x(4)^2;
    f4(i) = x(3) + x(4) - x(1);

    df1dm = -2 * 7.2*x(2) ;
    df2dm1 = 25 + 2*3.75*x(3) ;
    df3dm2 = 65 + 60 * x(4) ;

    A = [1 df1dm 0 0
1 0df2dm1 0
1 0 0 df3dm2
0 1 -1 -1];
    Ff = -[f1(i); f2(i); f3(i);f4(i)];

    deltaX = A\Ff;
    xant = x;
    x = xant + deltaX;

    if (abs( (x(1) - xant(1)) / x(1)) < eps &&...
        abs( (x(2) - xant(2)) / x(2)) < eps &&...
        abs( (x(3) - xant(3)) / x(3)) < eps &&...
        abs( (x(4) - xant(4)) / x(4)) < eps )
        break
    else
        continue
    end
end
```

## Referências

---

- [1] STOECKER, W. V. **Design of Thermal Systems**. 3.ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1989.
- [2] RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. da R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2.ed. São Paulo, SP: Pearson, 1997.
- [3] YOUNG, D. F.; MUNSON, B. RE OKIISHI; OKIISHI, T. H. **Fundamentos da Mecânica dos Fluidos**. Tradução da 4ª edição norte-americana. São Paulo, SP: Edgard Blucher, 2004.

# 7 - OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS

## 7.1 Definição

Otimização é o processo utilizado para encontrar valores das variáveis independentes que maximizem ou minimizem uma dada função, denominada de função objetivo. Destacam-se custo, massa, volume, área de troca de calor, entropia gerada, dentre outros [1].

Basicamente existem dois tipos de otimização: (i) Aquelas que analisam concepções diferentes de projetos, tais como comparar um ciclo de refrigeração por compressão de vapor e um por absorção; (ii) aquelas que analisam as variáveis operacionais de determinada concepção de projeto, como a escolha do tamanho de um compressor ou de um absorvedor [1].

Os conceitos de otimização que serão abordados nesta apostila não fornecerão informações suficientes para que seja possível “pular” de um conceito de projeto para outro, porém poderá fornecer ferramentas para comparação de resultados [1].

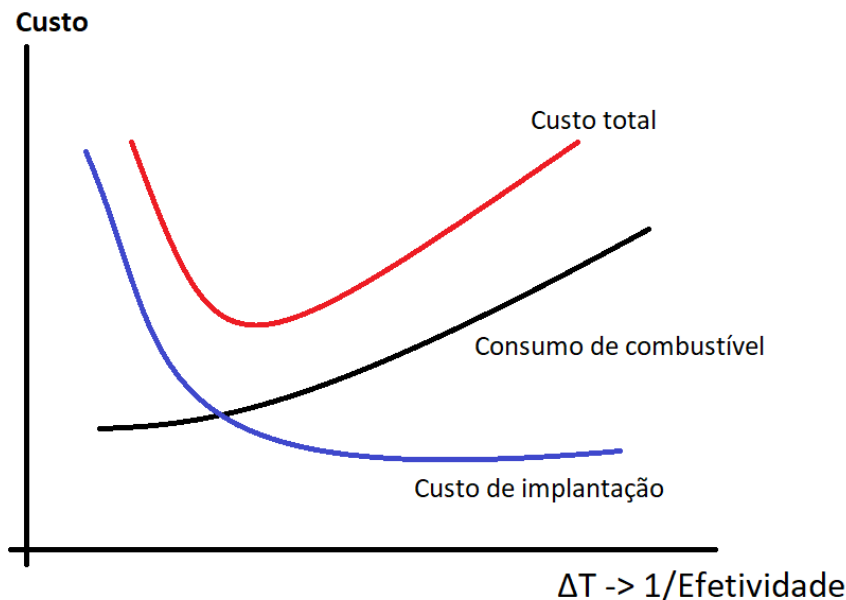
O primeiro passo para a otimização é definir quais são as variáveis que se deseja otimizar, tais como:

- Massa / Volume
- Qualidade / Durabilidade
- Geração de potência / Eficiência do sistema

Note que algumas variáveis podem levar a resultados semelhantes, dado que elas estão relacionadas. Porém pode haver variáveis que sejam inversamente proporcionais, razão pela qual é importante definir qual otimizar. Por exemplo:

- Efetividade de um trocador de calor / diferença de temperatura.

Depois de escolhidas as variáveis, é necessário representá-las matematicamente, de modo a se obter as funções objetivo. A Figura 6.1 indica uma representação esquemática da relação entre custos e alguns parâmetros a serem definidos em uma caldeira. Sabe-se que quanto maior a área de troca de calor, maior será a efetividade, isto é, menor o consumo de combustível associado à menor diferença de temperaturas. Por fim, sabe-se que, em contrapartida, o custo de implantação se eleva com o aumento da área de contato. Se for proposta uma função objetivo que seja a soma dos dois custos, deve existir um ponto “ótimo”, como indicado na Figura 6.1



**Figura 6-1 Custos em função da diferença finita de temperaturas. Baseado e modificado de [2]**

É necessário, também, estabelecer as restrições no problema para que a otimização ocorra em uma faixa admissível de valores. Geralmente essas funções são oriundas da própria modelagem, a exemplo da Primeira Lei da Termodinâmica. Outras formas de restrição são as limitações; por exemplo, massa não poder ser negativa, concentração de um soluto em um solvente não poder sair dos limites entre zero e 1 (um).

É importante ressaltar que podem existir três situações para o sistema de  $M$  equações e  $N$  variáveis independentes.

- **$M > N$ :** Problema superdimensionado, no qual não é possível sem eliminar restrições.
- **$M=N$ :** As equações podem ser resolvidas simultaneamente. Problema de Simulação.
- **$M < N$ :** Situação normal de um problema de otimização, ou seja, mais incógnitas do que equações.

Existem dois tipos de métodos de otimização: aqueles baseados em cálculo, e os que são baseados em busca. O primeiro é capaz de fornecer um valor como ótimo, e o segundo fornece um valor dentro de certos limites. Ademais, os métodos de busca são mais simples para programar, embora os métodos de cálculo sejam importantes para mostrar a lógica por detrás da otimização [1].

## 7.2 Preparação de um problema para otimização

De acordo com [1], é possível preparar um problema para otimizar, levando-se em conta o quadro resumo indicado na Figura 6.2. Nota-se que primeiro se decide o que se deseja otimizar e, em seguida, se estabelecem as funções de restrição. Por exemplo, a aplicação do balanço de massa (restrição de igualdade) ou que  $0 \leq c_{\text{NaCl}} \text{ em } \text{H}_2\text{O} \leq 1$  (restrição de desigualdade). Depois é feita a escolha do método de otimização [1].

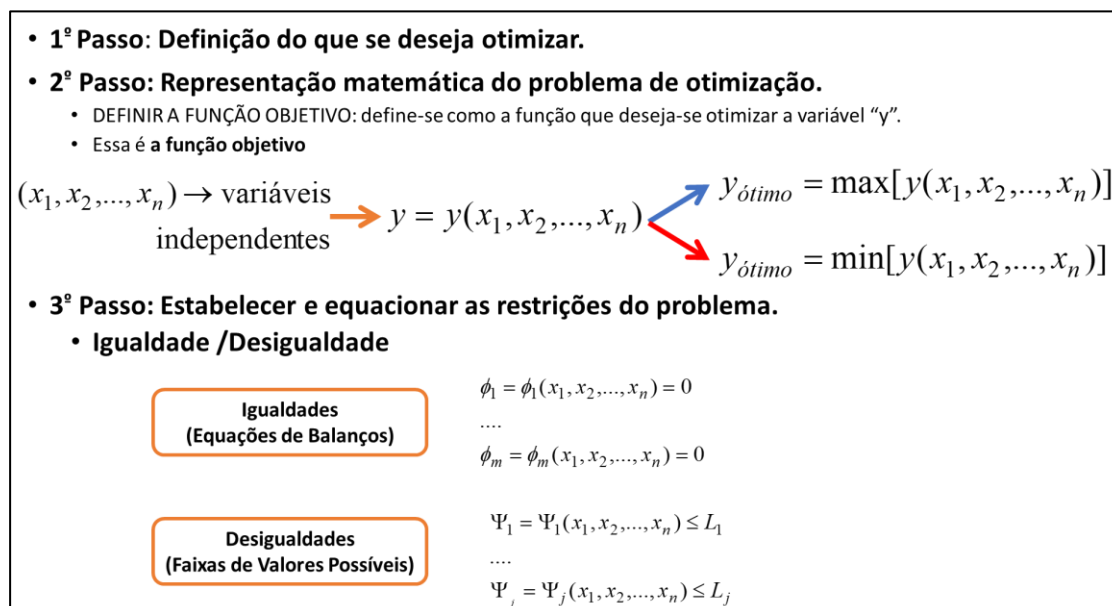


Figura 6-2 Quadro resumo para preparação do problema de otimização. Adaptado de [1]

## 7.3 Multiplicadores de Lagrange

O principal método de cálculo de otimização é o multiplicador de Lagrange. Esse método é aplicável em todo o sistema cujas funções de restrição sejam igualdades, porém é possível ajustá-lo para restrições de desigualdade. A este respeito, indica-se ao leitor ler a referência [1].

Dado um problema de otimização com a função objetivo do tipo:

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 6-1$$

Onde as restrições são expressas da seguinte forma: tendo-se um problema de  $m$  equações com  $n$  variáveis independentes. Nesse caso, não se leva em conta a função objetivo,  $y$ , como incógnita [1].:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ &\dots \\ \phi_m &= \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \quad 6-2$$

O método de Lagrange indica que o ponto ótimo (mínimo ou máximo) ocorre para os valores de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que satisfaçam a seguinte situação [1]:

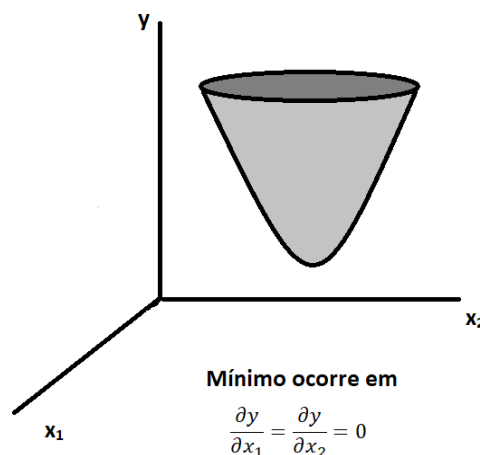
$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - \dots - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} &= 0 \\ \dots & \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} - \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} - \dots - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \quad 6-3$$

De forma mais concisa, o sistema de Equações 6-3 pode ser convertido em uma expressão, como demonstrado pela Equação 6-4 [1].

$$\nabla y - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \phi_i = 0 \quad 6-4$$

- **Problema sem restrição**

Caso o sistema não apresente restrições, é suficiente derivar a função e igualar a zero, pois o termo que equivale a  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \phi_i$  torna-se zero, restando apenas o gradiente da função objetivo. A Figura 6.3 indica uma representação gráfica do problema  $\nabla y = 0$  [1].



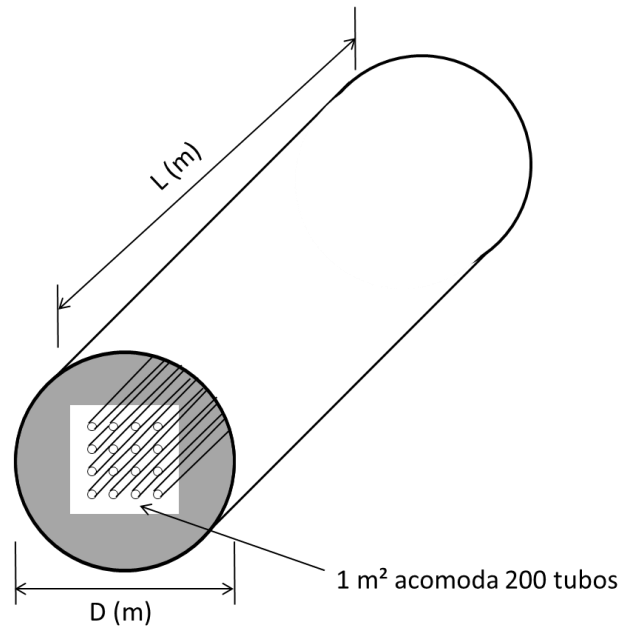
**Figura 6-3 Caso particular da otimização de Lagrange, quando não há função de restrição.**  
*Adaptado de [1]*

**Exemplo[1]:**

Otimizar D e L do trocador de calor casco-tubo da Figura 6.3 para minimizar custo inicial [1]. Dados:

- Trocador deve conter 100m de tubo.
- Espaçamento dos tubos: 200 tubos por m<sup>2</sup> de área transversal.
- Custo dos tubos = R\$900
- Custo do casco = R\$ 1100.L.D<sup>2,5</sup>

- Custo da área de piso ocupada = 320.D.L



**Figura 6-4 Trocador de calor casco e tubo, figura proposta por [1] e adaptada**

Deseja-se, portanto, otimizar as Equações 6-5 e 6-6, sendo a primeira a função objetivo, e a segunda, a restrição relacionada a 100 m de tubo e 200 tubos por m<sup>2</sup> de área transversal.

$$C = 900 + 1100LD^{2,5} + 320DL \quad 6-5$$

$$\phi = 50\pi D^2 L - 100 = 0 \quad 6-6$$

Fazendo-se  $L = 2 / (\pi D^2)$ , tem-se a função objetivo modificada:  $C = 900 + 2200D^{0,5}/\pi + 640/(\pi D)$ .

Agora, derivando-se C em relação a D, é possível obter um valor ótimo de diâmetro  $D^*=0,7$  e com isso  $L^*=1.3$ . Substituindo na Equação 6-5, calcula-se como custo mínimo R\$ 1.777,45

#### ✓ Problema sem restrição

O mesmo exemplo pode ser resolvido pelo caso geral, ou seja, pela otimização sem restrição. Primeiramente, é preciso encontrar as derivadas parciais da função objetivo e as das restrições.

$$\frac{\partial C}{\partial D} = 2750D^{1,5}L + 320L$$

$$\frac{\partial C}{\partial L} = 1100D^{2,5} + 320D$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial D} = 100\pi DL$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial L} = 50\pi D^2$$

O próximo passo é montar o sistema da seguinte forma:

$$\frac{\partial C}{\partial D} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial D} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial L} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial L} = 0$$

$$\phi(x_1, x_2) = 0$$

Onde se obtém o seguinte sistema:

$$2750D^{1,5}L + 320L - \lambda(100\pi DL) = 0$$

$$1100D^{2,5} + 320D - \lambda(50\pi D^2) = 0$$

$$50\pi D^2L - 100 = 0$$

Nota-se que a função objetivo não faz parte do sistema, por isso é a última a ser calculada. Primeiro, se avaliam as variáveis independentes; e depois se calcula o valor mínimo ou máximo [1].

Assim:

$$D = 0,7m$$

Depois de encontrado o valor ótimo de D, é possível calcular também o valor ótimo de L, da seguinte forma:

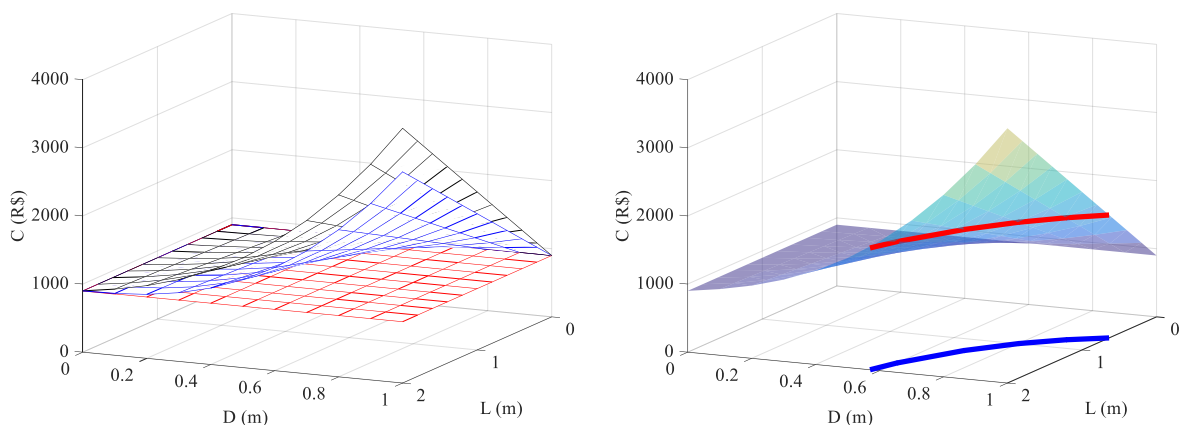
$$L = \frac{2}{\pi(0,7)^2} = 1,311m$$

Com os valores de D e L, é possível encontrar os valores de C e  $\lambda$ :

$$C = R\$1.777$$

$$\lambda = 8,769$$

A Figura 6.4 indica a interpretação geométrica do problema. É possível notar a superfície que representa a função objetivo e a curva que representa a função de restrição. Nota-se que o mínimo sem restrição, matematicamente, seria R\$900,00. Porém, dado que a restrição existe (no caso uma restrição física e de material), tem-se o ponto de mínimo “dentro da restrição”.

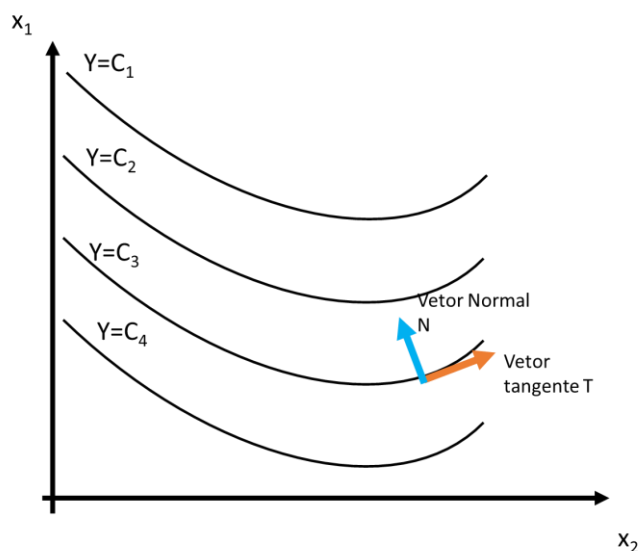


**Figura 6-5 Interpretação geométrica do exemplo de aula, figura proposta por [1]**

### ✓ Interpretação geométrica dos multiplicadores de Lagrange

Dado  $y = f(x_1, x_2)$  da Figura 6.6, constata-se que o diferencial  $dy$  pode ser calculado de acordo com a Equação 6.7[1].

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 \quad 6-7$$



**Figura 6-6 Interpretação geométrica do vetor gradiente, figura baseada em [1,9]**

A seguir, escolhendo-se uma linha em que  $y$  é constante, por exemplo  $c_3$ , tem-se que  $dy = 0$  e, com isso, é possível propor a seguinte relação entre  $dx_1$  e  $dx_2$  para que o vetor seja tangente[1]:

$$dx_1 = -\frac{(\partial y / \partial x_2)}{(\partial y / \partial x_1)} dx_2 \quad 6-8$$

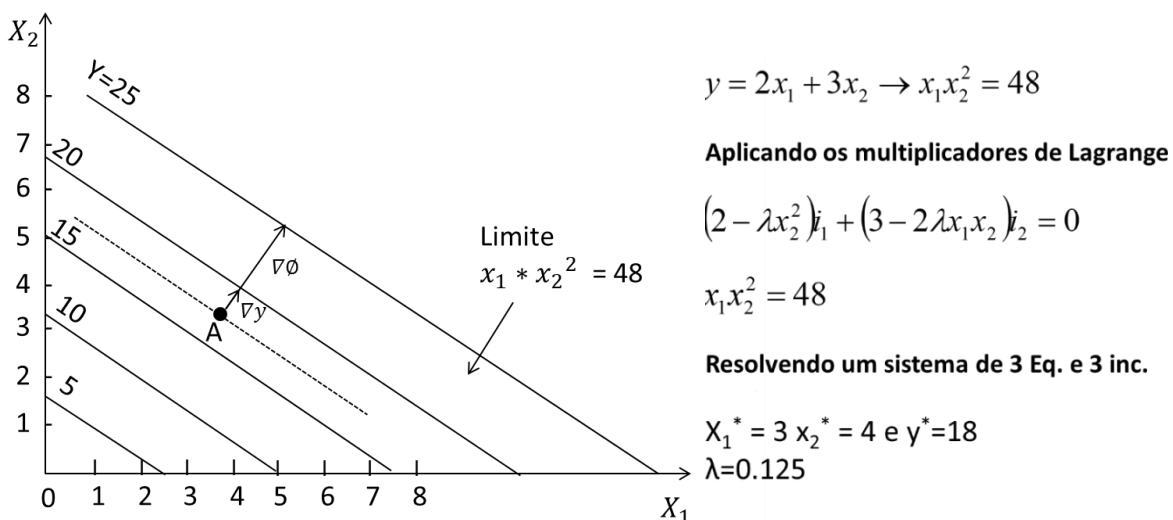
Dado um vetor arbitrário qualquer  $dx_1 i + dx_2 j$  pode-se transformá-lo em vetor unitário:  $(dx_1 i + dx_2 j) / \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$ . Para que este seja tangente, deve-se usar a Equação 6-8, conforme mostrado na Equação 6-9[1].

$$T = \frac{-\frac{\partial y / \partial x_2}{\partial y / \partial x_1} i + j}{\sqrt{\left(\frac{\partial y / \partial x_2}{\partial y / \partial x_1}\right)^2 + 1}} = \frac{-\partial y / \partial x_2 i + \partial y / \partial x_1 j}{\sqrt{(\partial y / \partial x_1)^2 + (\partial y / \partial x_2)^2}} \quad 6-9$$

Calculando-se o gradiente da função, porém unitário, chega-se à Equação 6-10. Observa-se que, quando se calcula o produto escalar entre G e T, o resultado equivale a zero. Dessa forma, pode-se concluir que o vetor gradiente é perpendicular à curva no ponto[1].

$$G = \frac{\nabla y}{|\nabla y|} = \frac{\partial y / \partial x_1 i + \partial y / \partial x_2 j}{\sqrt{(\partial y / \partial x_1)^2 + (\partial y / \partial x_2)^2}} \quad 6-10$$

Ademais, pode-se ainda concluir que, em um problema com uma única restrição, o vetor gradiente da função objetivo é paralelo ao gradiente das restrições. O valor de  $\lambda$  é o que faz com que ambos sejam paralelos e com mesma magnitude, conforme Figura 6.7. Outra interpretação para essa última grandeza é o coeficiente de sensibilidade. Para melhores informações, sugere-se ao leitor as referências [1,9,10]



**Figura 6-7 Interpretação geométrica dos multiplicadores de Lagrange, figura extraída e adaptada de [1]**

## 7.4 Programação geométrica

O método da programação geométrica é aplicável quando as funções objetivo e as funções de restrição são compostas por polinômios. Em sistemas térmicos em regime permanente, a maioria dos problemas acarreta em polinômios formando sistemas de equações não lineares. A explicação do procedimento para obtenção desse método pode ser vista em [1]

Este método é a melhor escolha para otimizar sistemas, quando o seu grau de dificuldade for igual a zero [1]. Ou seja:

$$G = T - (N + 1) \quad 6-11$$

Onde G é o grau de dificuldade, T é o número de termos que a função possui, e N é o número de variáveis desta função [1]. Seguem alguns exemplos:

1.  $Y = 5X + 10/\sqrt{X}$

$$T = 2 \quad [5X \text{ e } 10/\sqrt{X}]$$

$$N = 1 \quad [X]$$

$$G = 0$$

2.  $Y = 6 + 3X - X^{1,8}$

$$T = 2 \quad [3X \text{ e } -X^{1,8}]$$

$$N = 1 \quad [X]$$

$$G = 0$$

3.  $Y = 2XZ + 5/\sqrt{X}Z + 10X^{0,8} - 4Z$

$$T = 4 \quad [2XZ, 5/\sqrt{X}Z, 10X^{0,8} \text{ e } -4Z]$$

$$N = 2 \quad [X \text{ e } Z]$$

$$G = 1 \text{ (Para esta equação é melhor escolher outro método)}$$

Dado um polinômio do tipo:

$$Y = C_1X^{a1} + C_2X^{a2} \quad 6-12$$

Chama-se

$$U_1 = C_1 X^{a_1} \quad 6-13$$

$$U_2 = C_2 X^{a_2} \quad 6-14$$

Assim

$$Y = U_1 + U_2 \quad 6-15$$

O método estabelece que o ponto ótimo é:

$$Y^* = \left( \frac{C_1 X^{a_1}}{W_1} \right)^{W_1} \left( \frac{C_2 X^{a_2}}{W_2} \right)^{W_2} = \left( \frac{C_1}{W_1} \right)^{W_1} \left( \frac{C_2}{W_2} \right)^{W_2} \quad 6-16$$

Com a seguinte condição:

$$W_1 + W_2 = 1 \quad 6-17$$

$$a_1 W_1 + a_2 W_2 = 0 \quad 6-18$$

Desse sistema é possível determinar  $Y^*$ .

Exemplo.

Otimizar a seguinte equação:

$$y = 160D + 32.10^{12}D^{-5}$$

Vemos que:

$$C_1 = 160$$

$$C_2 = 32.10^{12}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -5$$

Logo, é possível montar o seguinte sistema:

$$W_1 + W_2 = 1$$

$$1W_1 - 5W_2 = 0$$

A partir do qual é possível obter:

$$W_1 = 5/6$$

$$W_2 = 1/6$$

Por fim, nosso  $Y^*$  é:

$$Y^* = \left( \frac{160}{\frac{5}{6}} \right)^{\frac{5}{6}} \left( \frac{32 \cdot 10^{12}}{\frac{1}{6}} \right)^{\frac{1}{6}} = 19200$$

O interessante deste método é que é possível encontrar o valor ótimo de  $Y$  sem calcular o valor da variável  $D$ . Se for necessário calcular  $D$ , é preciso apenas resolver a seguinte função:

$$W_1 = \frac{U_1}{Y^*} = \frac{5}{6} = \frac{160D}{19200}$$

$$D^* = 100$$

## 7.5 Métodos de busca para otimização

De acordo com [1], a base dos métodos de busca está em escolher a melhor solução possível dentre um conjunto de soluções viáveis. O método define um intervalo de incerteza no qual a solução ótima se encontra, isto é:

$y^* - e < y^* < y^* + e$ , épsilon ( $e$ ) a precisão com que se quer a resposta.

Esse tipo de método pode ser utilizado para uma pré-otimização, restringindo o intervalo de busca da solução ótima, aplicando-se posteriormente outro método para refinar a solução. Além disso, tal método é usado quando todos os demais não são aplicáveis.

Existem diversos métodos disponíveis, seja para uma variável, seja para um sistema multivariável; ambos, com ou sem restrições.

**Método de uma variável:** Exaustivo, dicotomia, Fibonacci (Restrição dos dois últimos: funções que têm mais de um ponto de máximo ou mínimo).

**Método multivariável sem restrição:** Grade, busca univariante, gradiente.

**Método multivariável com restrição:** penalização, busca ao longo de uma restrição

## 7.6 Busca exaustiva

Este método visa calcular os valores da função objetivo para os valores de  $x$  espaçados uniformemente no intervalo de interesse. Assim, o intervalo de incerteza é reduzido, como mostrado na Equação 6.18

$$I = \frac{2I_0}{n+1} \quad 6-18$$

Desse modo, a Figura 6.8 mostra como esse método diminui o intervalo de incerteza. Note que se pode falar que o ótimo está entre  $y_{x=4}$  e  $y_{x=6}$ , não se podendo afirmar se o máximo está em  $y_{x=5}$  ou à sua direita ou esquerda.

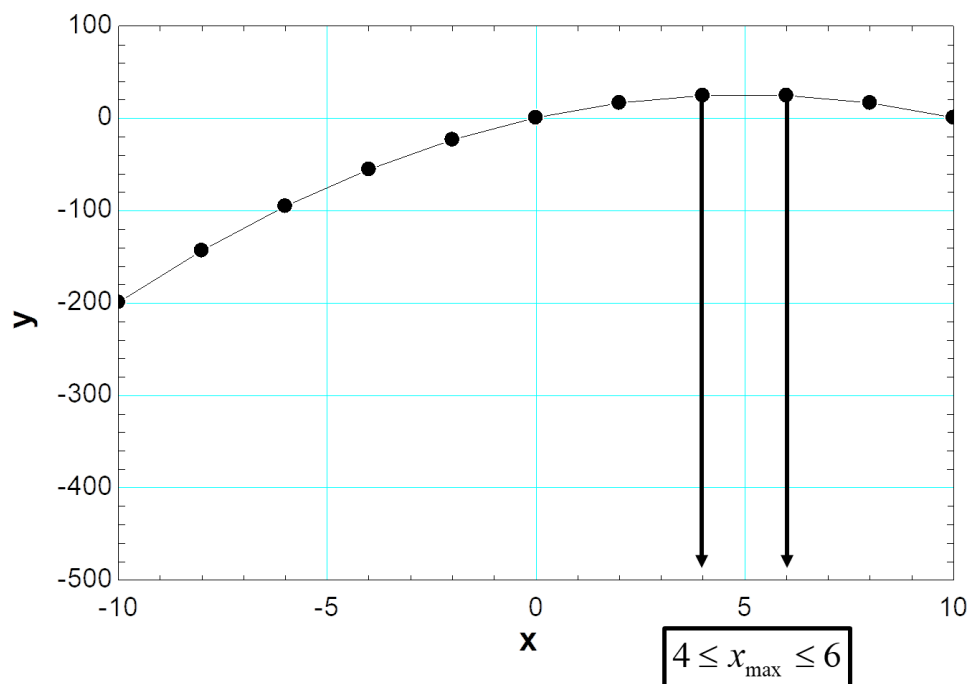


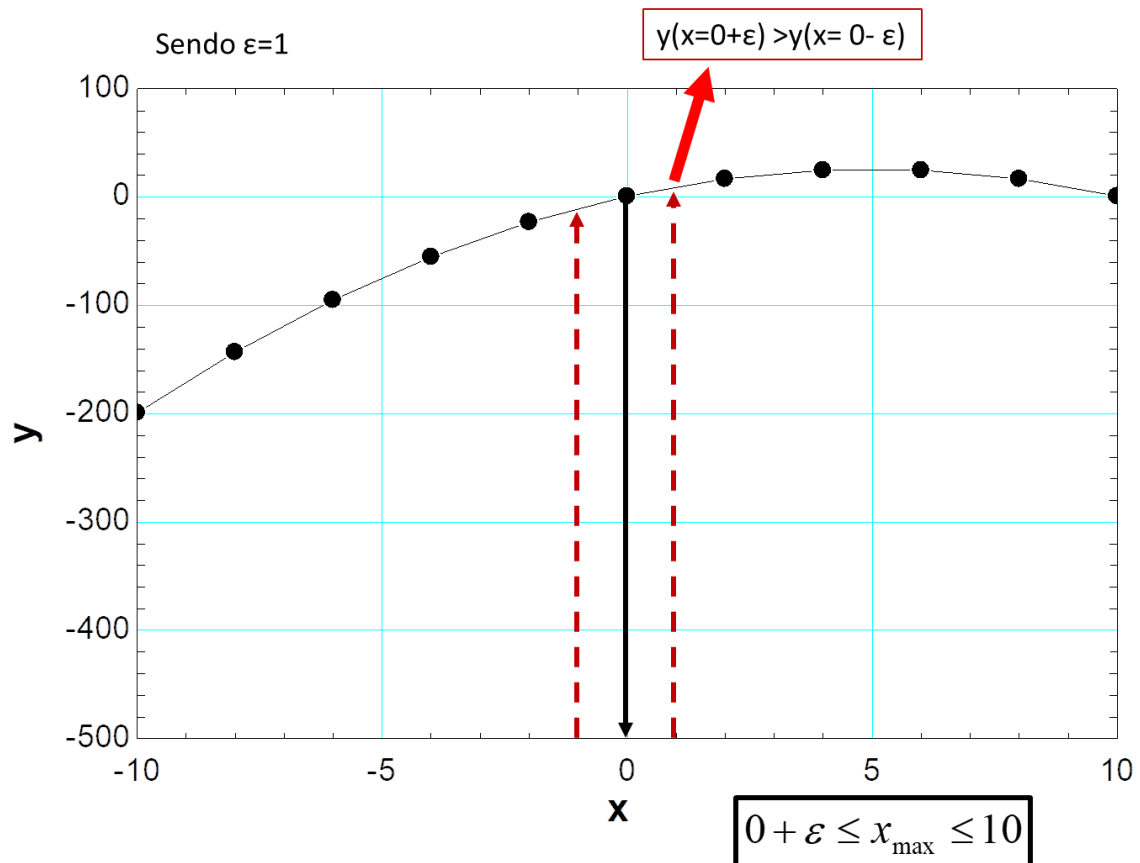
Figura 6-8 Método de busca para 7 valores uniformemente espaçados. Adaptado de [1]

### ✓ Dicotomia

Este método responde à seguinte dúvida: “Onde devem ser colocados dois pontos para que elimine a maior parte do intervalo de confiança?”. A resposta poderia ser: calculam-se dois valores função objetivo com os valores da variável independente igualmente espaçados de  $\varepsilon$  com relação ao centro do intervalo de interesse. Em função de  $y(x_A)$  e  $y(x_B)$ , descarta-se o intervalo à direita de  $x_B$  ou à esquerda de  $x_A$  [11].

A incerteza do intervalo restante pode ser dada pela expressão:

$$I = \frac{I_0}{2^n} + \varepsilon \left( 1 - \frac{I_0}{2^n} \right) \quad 6-18$$



**Figura 6-9** Representação esquemática do método de busca, usando-se dicotomia. Baseado em [1]

## 7.7 Método de Fibonacci

O mais eficiente método de busca para uma função de uma variável é o método de Fibonacci, cuja sequência é a seguinte:

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – 89 – 144 – ...

Ou seja:

$$F(0) = 1 \quad 6-12$$

$$F(1) = 1 \quad 6-13$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad 6-14$$

Para o melhor entendimento do método, é preciso um exemplo prático. Será utilizado, pois, um exemplo da referência [1].

Deseja-se encontrar o valor máximo da seguinte função:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x + 2 \\ 0 &\leq x \leq 5 \end{aligned} \quad 6-15$$

Para utilizar este método, é preciso primeiramente definir o número de tentativas, que tem que ser ao menos duas. Neste exemplo será utilizado  $n = 4$ . Após definido o valor

de  $n$  (número de tentativas), coloca-se o primeiro ponto de observação em  $I_0 = (F_{n-1}/F_n)$ , ou seja:

$$\begin{aligned} F_3 &= 3 \\ F_4 &= 5 \\ I_0 &= \frac{3}{5} \end{aligned} \quad 6-16$$

A estimativa inicial será  $3/5$  do intervalo de confiança  $[0;5]$ , logo, o primeiro valor é 3. O segundo ponto de observação é colocado simétrico ao primeiro, em relação ao intervalo estudado. Como o valor médio do intervalo de confiança é 2,5 e o número simétrico entre 3, no ponto 2,5 é 2, este é o segundo ponto em que a função será avaliada.

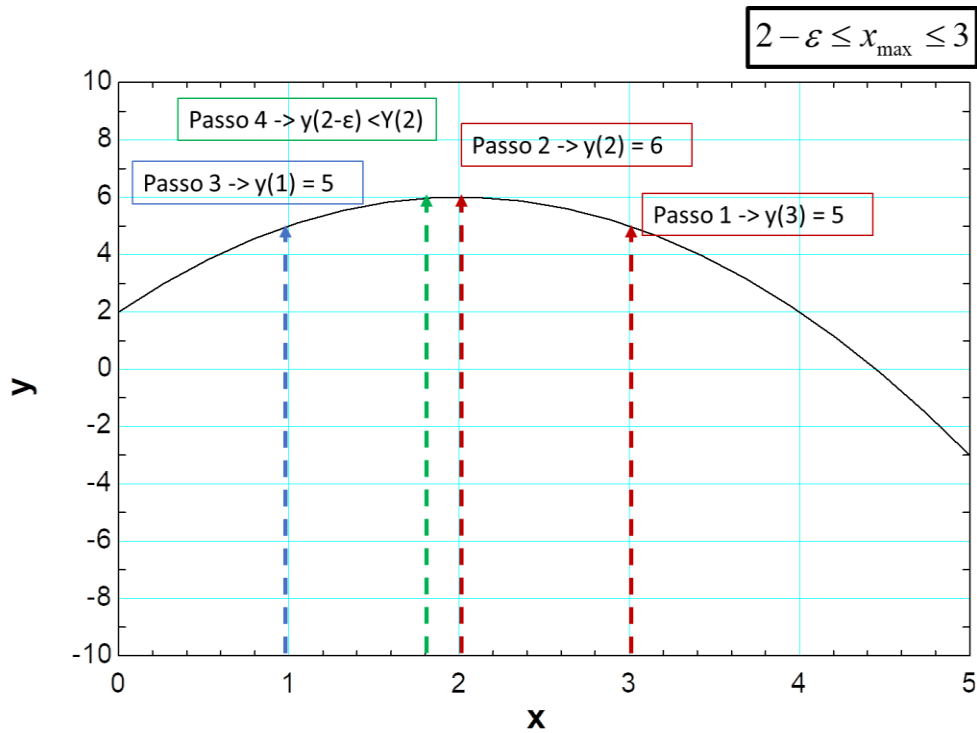
Com os dois pontos conhecidos é preciso verificar o valor da função nestes e excluir o intervalo que contenha o menor valor da função. Em seguida, é encontrado o terceiro ponto, que é simétrico ao ponto não excluído anteriormente. Novamente se calculam os valores das funções e elimina-se o intervalo que contenha o menor valor. Ou seja:

$$\begin{aligned} y(3) &= 5 \\ y(2) &= 6 \\ y(2) &> y(3) \end{aligned}$$

Como o valor da função para  $x=2$  é maior que o valor da função em  $x=3$ , pode-se eliminar o intervalo  $3 < X \leq 5$ , obtendo-se o novo intervalo:  $0 \leq x \leq 3$ .

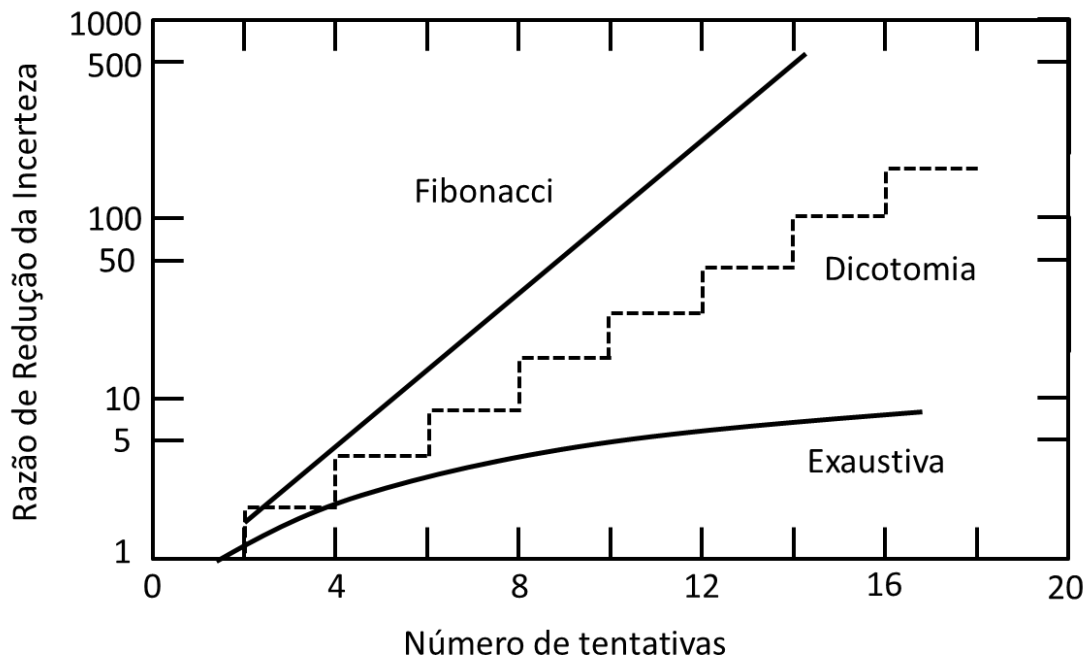
Colocando o terceiro ponto simétrico a 2 no novo intervalo,  $x=1$ , e aplicando os mesmos passos, é possível verificar que  $y(2) > y(1)$ , sendo, também, possível eliminar o intervalo  $0 \leq x < 1$ .

O próximo ponto será um valor muito próximo de 2, ou seja,  $x = 2 - \varepsilon$ , e verificando-se novamente os valores das funções nos pontos, se encontra que  $y(2 - \varepsilon) < y(2)$ , logo, o novo intervalo de confiança é  $y(2 - \varepsilon) < x \leq 3$ . A Figura 6-10 indica o procedimento para o método de busca baseado na sequência de Fibonacci. Neste caso, o intervalo de incerteza é  $\frac{I_0}{5} + \varepsilon$ , ou seja, para um número de observações  $n$  o intervalo de incerteza será  $\frac{I_0}{F_n} + \varepsilon$ . É possível concluir que quanto maior for o número de tentativas, menor é o intervalo encontrado. Desse modo, é possível calcular vários intervalos até que convirja para um valor com um erro aceitável.



**Figura 6-9** Representação esquemática do método de busca, usando-se a sequência de Fibonacci. Baseado em [1]

A Figura 6.9 indica a eficiência dos métodos para uma variável, lembrando que para uma variável, eficiência nem sempre é necessária, dado que a diferença no custo computacional é pequena. Já nos métodos com várias variáveis, usar busca exaustiva aumenta muito o tempo de uso de computador. Geralmente, esses métodos são base para os multivariáveis, ou seja, os outros métodos baseiam-se nas propostas anteriores, porém com mais variáveis.



**Figura 6-10** Representação esquemática da eficiência dos três métodos de busca. Obtido e adaptada de [2], baseado em [1]

---

## Referências

- [1] STOECKER, W. V. **Design of Thermal Systems**. 3.ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1989.
- [2] FIORELLI, F.A.S. Notas de aulas da disciplina de modelagem e simulação de sistemas térmicos. Unicamp, 2017.

# Bibliografia complementar

JALURIA, Y. **Design and optimization of Thermal Systems**. New York, N.Y.: McGraw-Hill, 1998.

PENONCELLO, Steven G. **Thermal energy systems: design and analysis**. New York, N.Y.: CRC Press, 2015.