

Caos em sistemas Hamiltonianos

M.A.M. de Aguiar

Mini-curso apresentado no Instituto de Física da
Universidade de São Paulo em Fevereiro de 1992

notas de física ifgw

CAOS EM SISTEMAS HAMILTONIANOS

M.A.M. de Aguiar

Departamento de Física do Estado Sólido e Ciência dos Materiais,
Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de
Campinas, 13081, Campinas, SP, Brasil

Mini-curso apresentado no Instituto de Física da Universidade de
São Paulo em Fevereiro de 1992

0. SOBRE O CURSO

O objetivo deste mini-curso é apresentar de forma razoavelmente simples a teoria clássica de sistemas Hamiltonianos não-integráveis, onde movimentos caóticos e regulares se misturam de maneira complexa e fascinante. No último capítulo passa-se rapidamente pela mecânica quântica, apresentando de forma descritiva os principais resultados do que hoje é conhecido como caologia quântica. A palavra "razoavelmente" na primeira linha é proposital: alguns dos capítulos (2 e 4 principalmente) envolvem um pouco de álgebra que, embora enfadonha, é essencial para uma visão mais detalhada e analítica da teoria que pretendemos desenvolver.

Muito poucas referências são citadas ao longo deste texto para que a leitura não se torne cansativa. Embora a idéia tenha sido fazer um curso "auto-contido", o leitor é fortemente aconselhado a se remeter às referências para maiores detalhes. Estas estão agrupadas por capítulo e/ou tópico no final dessas notas.

INDICE

I-	INTEGRABILIDADE	3
II-	FORMAS NORMAIS	17
III-	O TEOREMA KAM E OS EMARANHADOS HOMOCLÍNICOS	28
IV-	ÓRBITAS PERIÓDICAS E BIFURCAÇÕES	39
V-	CÁLCULO NUMÉRICO DE ÓRBITAS PERIÓDICAS	54
VI-	CAOS NA MECÂNICA QUÂNTICA	62
APÊNDICE-	TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS EM VARIÁVEIS COMPLEXAS ..	71

I. INTEGRABILIDADE

1. Introdução

A equação que descreve o movimento de partículas sujeitas à forças externas é a famosa 2ª lei de Newton $F = ma$. Para forças conservativas, $F = -\nabla V$, essa equação toma a forma $ma = -\nabla V$. O grande inconveniente da 2ª lei de Newton é que ela só é válida em coordenadas cartesianas. No caso de uma partícula movendo-se no espaço tridimensional, temos que

$$m\ddot{x}_i = - \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (1)$$

mas não podemos inferir daí, por exemplo, que $m\ddot{\theta} = -\frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}$ onde (r, θ, φ) são coordenadas esféricas usuais.

No entanto, é possível derivar equações equivalentes à de Newton que são válidas diretamente em qualquer sistema de coordenadas. Essas são as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.a)$$

onde q_i são coordenadas generalizadas (cartesianas, esféricas, etc) e a "Lagrangeana" L é

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V \quad (2.b)$$

com T e V as energias cinética e potencial expressas em termos das

variáveis q_i .

As equações de Lagrange, assim como as de Newton, são de segunda ordem no tempo. Uma terceira formulação da mecânica clássica transforma esse conjunto de equações em um novo conjunto, com o dobro de equações, de primeira ordem. Essa formulação, de Hamilton, segue da de Lagrange com a definição dos momentos generalizados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3)$$

Em termos das variáveis canônicas $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$ as Equações de Hamilton ficam

$$\dot{\underset{\sim}{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{p}_i} ,$$

$$\dot{\underset{\sim}{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \underset{\sim}{q}_i} ,$$

$$H(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}) = \sum_i \underset{\sim}{p}_i \dot{\underset{\sim}{q}}_i - L$$

Antes de analisar os tipos de soluções possíveis dentro do formalismo Hamiltoniano, nós percebemos as equações acima não valem em qualquer sistema de coordenadas $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$, pois os momentos estão atrelados às coordenadas pela equação (3). Então, a primeira pergunta que temos que responder é: que propriedades a mudança de variáveis

$$\begin{matrix} q, p & Q(q, p) & , & P(q, p) \\ \sim & \sim & & \sim \end{matrix} \quad (5)$$

deve satisfazer para que, nas novas variáveis $\begin{matrix} Q, \\ \sim \end{matrix}$ $\begin{matrix} P \\ \sim \end{matrix}$ tenhamos

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (6)$$

$$\begin{matrix} K(Q, P) \\ \sim \end{matrix} = H(\begin{matrix} q(Q, P) \\ \sim \end{matrix}, \begin{matrix} p(Q, P) \\ \sim \end{matrix})$$

As transformações com a propriedade acima são conhecidas como transformações canônicas e serão de importância fundamental no decorrer dessas notas. Damos a seguir um resumo da teoria de transformações canônicas, mas o leitor é fortemente encorajado a estudar o capítulo 9 do livro do Goldstein para uma visão mais abrangente.

2. Transformações Canônicas

Uma das maneiras de encontrar condições para que uma transformação geral do tipo (5) seja canônica é via "força bruta", ou seja, calculamos $\dot{Q}$ e $\dot{P}$ e impomos as igualdades (6). Por simplicidade, faremos os cálculos só para um grau de liberdade. Então

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial q} \left[\frac{\partial K}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial P} + \frac{\partial K}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right] - \frac{\partial Q}{\partial p} \left[\frac{\partial K}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial K}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right] = \frac{\partial K}{\partial P} \cdot \{Q, P\}_{q,p}$$

e, analogamente,

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \cdot \{Q, P\}_{q,p}$$

onde definimos o Parênteses de Poisson de duas funções F e G como

$$\{F, G\}_{q,p} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} \quad (7)$$

A condição para que a transformação $q, p \rightarrow Q, P$ seja canônica é então que

$$\{Q, P\}_{q,p} = 1$$

Uma maneira elegante e muito útil de construir transformações canônicas é por meio de funções geratrizes. Para isso, notamos que as equações de Hamilton (assim como as de Lagrange) podem ser obtidas por meio de um princípio variacional:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H) dt = 0$$

onde as variações são em relação às trajetórias no espaço de fases q, p , com extremos fixos, ou seja, $\delta q(t_1) = \delta p(t_1) = \delta q(t_2) = \delta p(t_2) = 0$. Então, se as eqs. (4) e (6) são satisfeitas,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (P\dot{Q} - K) dt = 0 \quad .$$

e os integrandos diferem entre si apenas pela derivada total de uma função arbitrária F em relação ao tempo:

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K + \frac{dF}{dt} \quad .$$

Escolhendo F como função de q e Q , por exemplo, obtemos:

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K + \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

o que define a transformação canônica implicitamente através das equações

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad , \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \quad , \quad K = H - \frac{\partial F}{\partial t} \quad (8)$$

Exercício 1 Mostre que a transformação $q, p \rightarrow Q, P$ acima satisfaz $\{Q, P\}_{q, p} = 1$.

Solução

$$\{Q, P\}_{q, p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \quad ; \quad F(q, Q) = F(q, Q(q, p))$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\partial F}{\partial Q} \right] = -\frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} \quad ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{\partial F}{\partial Q} \right] = -\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial q} \quad e$$

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial p} = 1 \quad ,$$

pois derivando $p = \frac{\partial F}{\partial q}$ de ambos os lados em relação a p obtemos $1 = \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p}$. Note que se F não depende explicitamente do tempo, $K = H$.

Na verdade as funções geratrizes podem depender de qualquer par entre as variáveis q, p e Q, P . Damos a seguir as regras para a transformação canônica implícita em cada caso (veja novamente o Cap. 9 do Goldstein):

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q}(q, Q) \quad , \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}(q, Q) \quad , \quad F = F_1(q, Q) \\ p &= \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P) \quad ; \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}(q, P) \quad ; \quad F = F_2(q, P) - QP \\ q &= -\frac{\partial F_3}{\partial p}(p, Q) \quad ; \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}(p, Q) \quad ; \quad F = F_3(p, Q) + qp \\ q &= -\frac{\partial F_4}{\partial p}(p, P) \quad ; \quad Q = -\frac{\partial F_4}{\partial P}(p, P) \quad ; \quad F = F_4(p, P) + qp - QP \end{aligned} \quad (9)$$

A nomenclatura F_1, F_2, F_3 e F_4 é convencional.

3. Integrabilidade e Não-Integrabilidade

Transformações canônicas podem ser muito úteis na solução de problemas. Suponha por exemplo que seja possível mudar

de (q,p) (Q,P) tal que, nas novas variáveis, a hamiltoniana só dependa dos P 's. Então, $H = H(P)$ (usaremos novamente H em vez de K para a Hamiltoniana transformada) e

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \omega_i(P) \quad (10a)$$

$$\dot{P}_i = \frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0$$

donde verificamos que os momentos são todos constantes do movimento. Integrando temos

$$Q_i(t) = \omega_i(P)t + Q_i^0 \quad (10b)$$

$$P_i(t) = P_i^0$$

e resolvemos trivialmente nosso problema. Agora é só fazer a transformação inversa e obter $q_i(t)$ e $p_i(t)$. Se o espaço de fases em questão é limitado, ou seja, se a partícula se move dentro de uma região limitada, então cada $Q_i(t)$ é limitado. A única forma de conciliar esse fato com o crescimento linear em (10.b) é verificando que os Q_i 's são de fato variáveis do tipo ângulo.

Exemplo 1 $H = p^2/2 + \omega^2 q^2/2$

$$(q,p) \quad (P,Q) : \begin{cases} q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \cos Q \\ p = \sqrt{2P\omega} \sin Q \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} Q = \text{tg}^{-1}(p/\omega q) \\ P = p^2/2\omega + \frac{\omega q^2}{2} = \frac{E}{\omega} \end{cases}$$

$$H(Q,P) = \omega P \quad Q(t) = \omega t + Q^0$$

$$P(t) = P^0$$

Sistemas com essa característica são ditos separáveis e fazem parte de uma classe mais geral dos sistemas integráveis. O teorema de Arnold-Liouville dá condições necessárias e suficientes para que um sistema seja integrável e é baseado na existência de constantes de movimento. Note que se $F(q,p)$ é uma constante do movimento, $\frac{dF}{dt} = 0$, então

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} = \{H, F\}_{q,p} = 0 \quad .$$

Duas funções F_1 e F_2 são ditas em involução se $\{F_1, F_2\}_{q,p} = 0$.

Teorema (Arnold-Liouville) Se um sistema Hamiltoniano de N graus de liberdade possui N constantes de movimento F_i em involução, $\{F_i, F_j\} = 0$, então a superfície N -dimensional

$$M_f = \{x: F_i(x) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N\}$$

com $x = (q, p)$ um ponto do espaço de fases, tem as seguintes propriedades:

- 1) Condições iniciais sobre M_f permanecem sobre M_f para o fluxo gerado por $H = F_1$;
- 2) Se M_f é limitado e conexo, então ele é difeomorfo a um toro

N-dimensional $T^N = \{(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \bmod 2\pi\};$

- 3) O movimento sobre M_f é quasi-periódico com $\frac{d\varphi}{dt} = \omega(f)$;
- 4) As equações de movimento podem ser integradas por quadraturas, ou seja, podem ser escritas em termos de funções elementares.

Uma formulação mais rigorosa pode ser encontrada no Capítulo 10 do livro do Arnold. O movimento de uma partícula descrita por uma Hamiltoniana integrável é muito diferente daquele descrito por uma Hamiltoniana não-integrável. Caos, por exemplo, só pode ocorrer no segundo, pois no primeiro caso o movimento é, de certa forma, trivial.

Exemplo 2 $H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \sqrt{p_1 - p_2} \cos q_2$

é integrável, pois $F_1 = H$ e $F_2 = p_1$ são constantes de movimento em involução. No entanto, H não é separável.

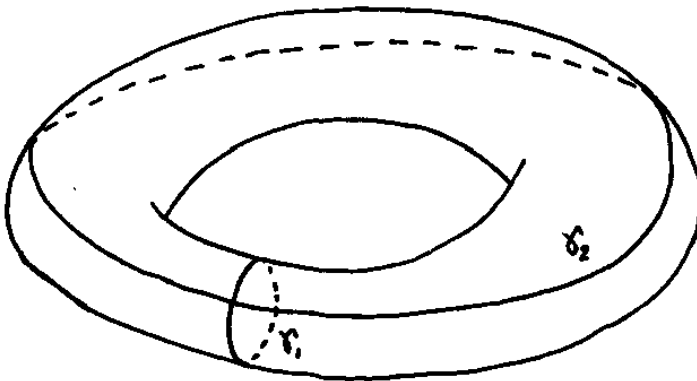
4. Variáveis de Ângulo e Ação

A idéia por trás da demonstração do teorema de Arnold-Liouville para sistemas separáveis é que existe uma transformação canônica $(q, p) \rightarrow (Q, P=F)$. Como os F são constantes H não deve depender de Q e caímos na situação descrita pelas equações (10) (a demonstração geral é bem mais elaborada e também

é feita no capítulo 10 do Arnold). Note no entanto que qualquer combinação das F_i também resulta numa constante de movimento, de forma que podemos escolher nossas constantes de forma conveniente. Então, em analogia com o oscilador harmônico unidimensional, exemplo 1, e motivados pelas regras de quantização semiclássica WKB (veja o capítulo 6) definimos as variáveis de ação por:

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \tilde{p} \cdot d\tilde{q}$$

onde γ_i é um dos N circuitos irreduzíveis do toro T^N . Para $N = 2$ esses circuitos são ilustrados na figura abaixo



As variáveis canonicamente conjugadas a J_i são ângulos θ_i ao longo dos correspondentes circuitos γ_i .

Exercício 2 Mostre que as variáveis P, Q do exemplo 1 são de ação e ângulo.

Solução Pela definição .

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = 4 \int_0^{\bar{q}} \sqrt{2(E - \frac{\omega^2 q^2}{2})} dq = 4\sqrt{2E} \int_0^{\bar{q}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 q^2}{2E}} dq$$

onde

$$\bar{q} = \sqrt{2E/\omega^2} .$$

Fazendo $\frac{\omega q}{\sqrt{2E}} = \sin \theta$ vem que

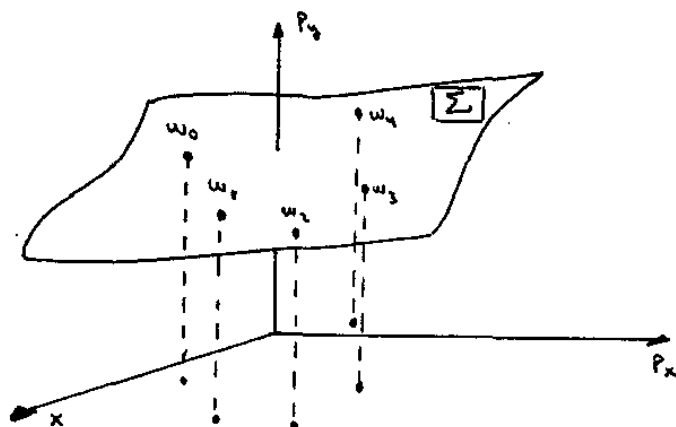
$$J = E/W = P.$$

Embora seja muitas vezes difícil obter-se variáveis de ângulo e ação analiticamente, elas são muito úteis do ponto de vista formal e não muito difíceis de se calcular numericamente.

5. Seções de Poincaré

Para finalizar este capítulo, vamos introduzir o conceito de seções de Poincaré e mostrar exemplos de sistemas integráveis e não-integráveis. Para fixar idéias, vamos tomar apenas 2 graus de liberdade. Então, o espaço de fases (q, p) tem dimensão 4 mas o movimento fica sempre restrito à superfície de energia, de dimensão 3. Ainda assim, se observarmos uma trajetória por um tempo longo e fizermos seu gráfico no papel, ou seja, projetado em duas dimensões, dá para imaginar que a imagem resultante não ficará muito clara. A idéia então é introduzir em

$t = 0$ uma superfície transversal ao movimento e só marcar pontos nessa superfície quando a trajetória da partícula cruzá-la novamente. Se $H = H(x, p_x, y, p_y)$, fixamos uma energia E e escolhemos, por exemplo, $y = 0$. Então, dados (x^0, p_x^0) , p_y^0 fica determinado (a menos de um sinal) por $E = H(x^0, p_x^0, 0, p_y^0)$. Integrando as equações de movimento, coletamos (x, p_x) toda vez que $y = 0$ e $\text{sgn}(p_y) = \text{sgn}(p_y^0)$. O conjunto desses pontos coletados (para vários valores iniciais de x^0, p_x^0) é a seção de Poincaré em $y = 0$. Note que os pontos da seção, $(x, p_x, y=0, p_y)$ não estão sobre o plano (x, p_x) , pois em geral $p_y \neq 0$. Na verdade esses pontos estão sobre uma superfície bidimensional Σ , cuja projeção no plano (x, p_x) fornece a seção de Poincaré:



$$\omega_0 = (x_0, p_{x0}, y=0, p_{y0}) = \text{condição inicial}$$

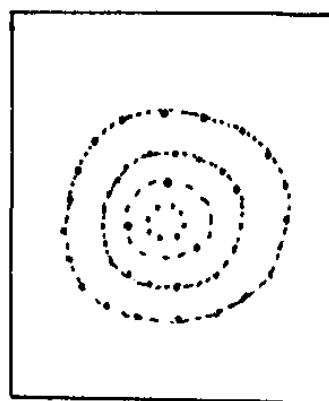
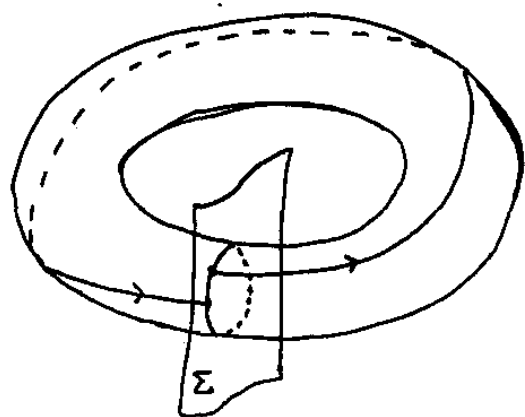
$$\omega_1 = (x_1, p_{x1}, y=0, p_{y1}) = \text{primeira intersecção}$$

$$\vdots$$

Exercício 3 Esboce Σ para $H = (p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) / 2$.

Se o sistema Hamiltoniano que estamos considerando é integrável, então seu espaço de fases é foliado por toros

invariantes. Quando cortados pela seção de Poincaré esses toros aparecem como círculos deformados e obtemos uma figura bastante regular:



Seção de Poincaré

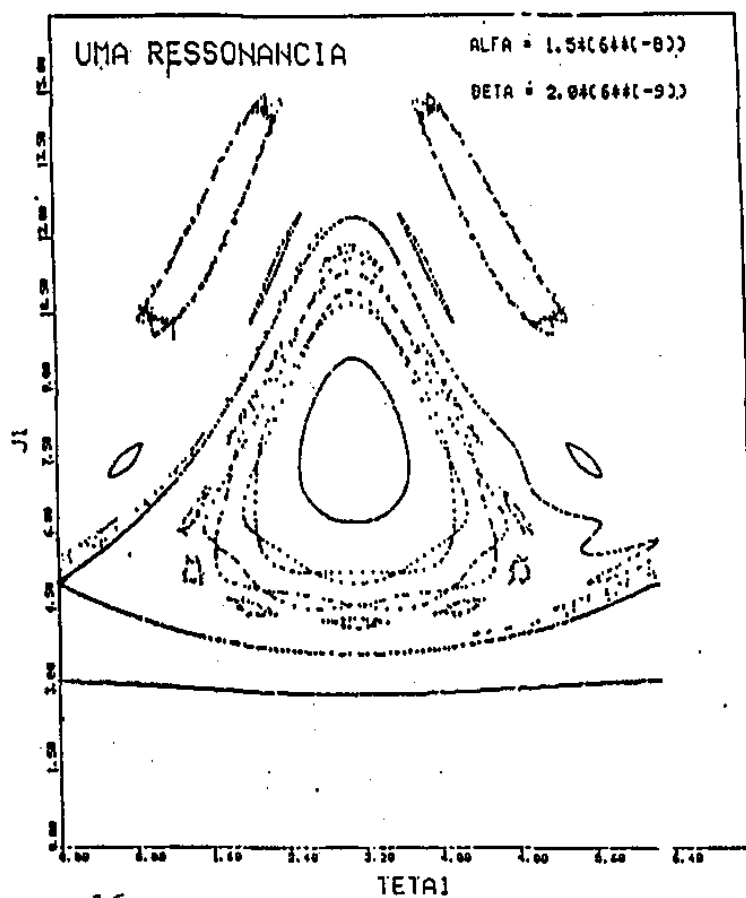
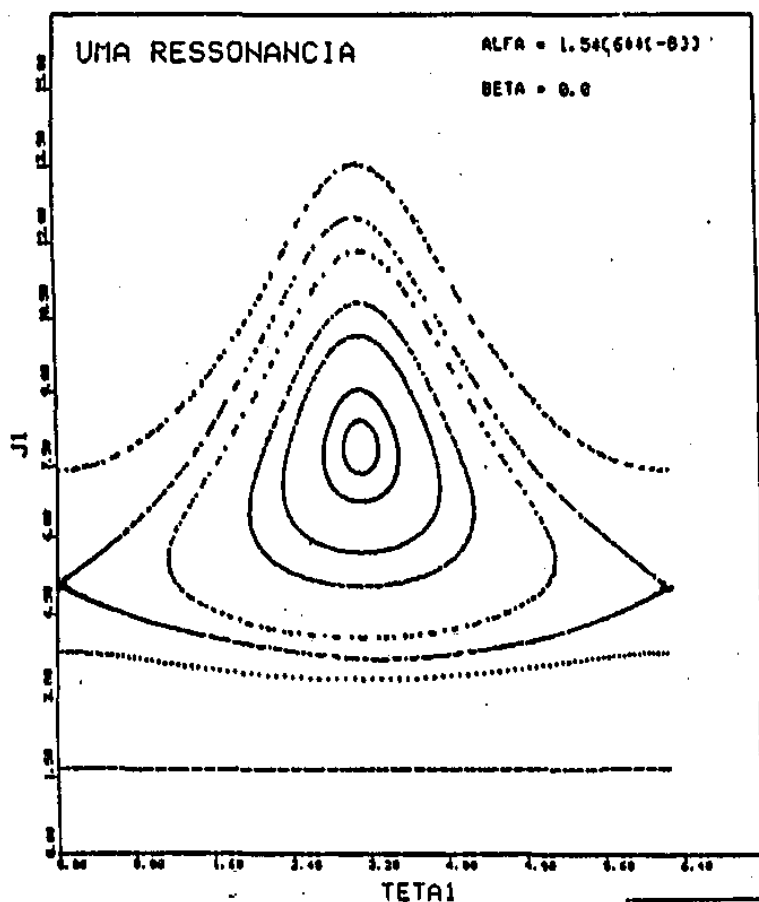
Órbitas periódicas aparecem como pontos fixos do mapa de Poincaré, P , ou de potências do mapa, P^s . Um ponto fixo de P^s corresponde a uma órbita que se fecha após dar s voltas e furar s vezes a seção.

Para sistemas não integráveis o movimento não está restrito à superfície do toro e a seção de Poincaré é bem mais complicada. Como exemplo concreto considere a Hamiltoniana

$$H(J, \theta) = J_2 - 6\lambda J_1 + 6^2 C J_1 + 6^3 J_1^3 \sqrt{J_2 - J_1} [\alpha \cos \theta_1 + \beta \cos \theta_2]$$

onde λ, C, α e β são parâmetros. É fácil ver que se $\beta = 0$ o sistema é integrável. As figuras abaixo mostram seções de Poincaré em $\theta_2 = 0$ para (A) $\beta = 0$ e (B) $\beta \neq 0$, mostrando a complexidade

introduzida pela não-integrabilidade. Ao longo deste curso vamos tentar entender as propriedades fundamentais dessas figuras.



II. FORMAS NORMAIS

1. Introdução

O último exemplo do capítulo I sugere que a melhor maneira de se estudar movimentos complexos, não-integráveis, é a partir de uma pequena perturbação em um sistema integrável. Os resultados fundamentais desse estudo estão contidos nos teoremas KAM e Poincaré-Birkhoff que veremos no próximo capítulo. O objetivo deste capítulo é tratar do movimento nas vizinhanças de pontos de equilíbrio numa aproximação além da linear. Esse tratamento serve como prelúdio ao teorema KAM, mostrando que movimentos sobre toros ressonantes desaparecem quando perturbados. As formas normais serão também a base da teoria de bifurcações de órbitas periódicas que desenvolveremos no capítulo IV.

2. Forma Normal Próxima a um Ponto de Equilíbrio Estável

Considere um sistema Hamiltoniano com 2 graus de liberdade com um ponto de equilíbrio estável na origem. Então, H tem a forma

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \geq 3} c_{\alpha} p_1^{\alpha_1} q_1^{\alpha_2} p_2^{\alpha_3} q_2^{\alpha_4} \quad (1)$$

Vamos mostrar que se $\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 \neq 0$ p/ $|k_1| + |k_2| \leq m$, onde k_1 e k_2 são inteiros, então existe uma sequência de

transformações canônicas que levam H à forma

$$\underline{H}(\underline{I}, \underline{\varphi}) = \underline{H}_m(\underline{I}) + \underline{R}(\underline{I}, \underline{\varphi}) \quad (2)$$

onde

$$\underline{H}_m = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + A_{11} I_1 I_2 + A_{20} I_1^2 + A_{02} I_2^2 + \dots A_{0, \frac{m}{2}} I_2^{m/2}$$

$$\underline{R} = O(I^{m/2+1})$$

e $I_i = \frac{p_i^2 + q_i^2}{2}$, $\varphi_i = \text{tg}^{-1}(p_i/\omega_i q_i)$ são variáveis de ângulo e ação.

$\underline{H}_m$ é a FORMA NORMAL DE BIRKHOFF de ordem m do sistema na vizinhança da origem, ou seja, uma aproximação não linear mas integrável de H. A demonstração sai por indução e fica mais fácil em termos das variáveis complexas

$$z_1 = \frac{q_1 + ip_1}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{q_2 + ip_2}{\sqrt{2}}$$

Nessas variáveis, H fica

$$-iH = -i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + \sum_{[\alpha] \geq 3}^{\infty} D_{\alpha} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{\alpha_3} \bar{z}_2^{\alpha_4} \quad (3)$$

onde os fatores -i são introduzidos para compensar o fato de que a transformação acima não é canônica (veja o apêndice). A notação da expressão na somatória é

$$[\alpha] = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$D_{\alpha} = D_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \quad .$$

Do fato de H ser real segue também que

$$D_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} = -D_{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2}^* \quad .$$

Vamos assumir então que, até ordem $N < m$ tenhamos conseguido reduzir a Hamiltoniana (3) à forma

$$\begin{aligned} -iH = & -i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + \\ & A_{20}(z_1 \bar{z}_1)^2 + \dots + A_{\frac{N}{2}, 0}(z_1 \bar{z}_1)^{N/2} \dots A_{0, \frac{N}{2}}(z_1 \bar{z}_2)^{N/2} + \\ & \sum_{[\alpha] \geq N+1}^{\infty} D_{\alpha} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{\alpha_3} \bar{z}_2^{\alpha_4} \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Fazemos agora uma transformação canônica $(z, \bar{z}) \rightarrow (w, \bar{w})$ gerada implicitamente por (veja novamente o apêndice)

$$\begin{aligned} S(z_1 z_2 \bar{w}_1 \bar{w}_2) = & z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \sum_{[\beta] \geq N+1} S_{\beta} z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{\beta_3} \bar{w}_2^{\beta_4} \\ \bar{z}_1 = \frac{\partial S}{\partial z_1} = & \bar{w}_1 + \sum_{[\beta] \geq N+1} S_{\beta} \beta_1 z_1^{\beta_1-1} z_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{\beta_3} \bar{w}_2^{\beta_4} \end{aligned} \quad (5)$$

$$w_1 = \frac{\partial s}{\partial w_1} = z_1 + \sum_{[\beta] \geq N+1} s_{\beta} \beta_3 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} w_1^{-\beta_3-1} w_2^{-\beta_4}$$

com equações análogas para $\bar{z}_2$ e w_2 . Essas equações podem ser reescritas na forma

$$\bar{z}_1 = \bar{w}_1 + \sum_{[\beta] = N+1} s_{\beta} \beta_1 w_1^{\beta_1-1} w_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{-\beta_3} \bar{w}_2^{-\beta_4} + O(N+2)$$

$$z_1 = w_1 - \sum_{[\beta] = N+1} s_{\beta} \beta_1 w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{-\beta_3-1} \bar{w}_2^{-\beta_4} + O(N+2)$$

e idem para $\bar{z}_2$ e z_2 .

Quando essas equações são introduzidas na Hamiltoniana da eq. (4) nós vemos que, por exemplo,

$$(z_1 \bar{z}_1)^2 = (w_1 \bar{w}_1)^2 + O(2N)$$

Os únicos termos que contribuem até ordem $N+1$ são os dois primeiros:

$$z_1 \bar{z}_1 = w_1 \bar{w}_1 + \sum_{[\beta] = N+1} s_{\beta} w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{-\beta_3} \bar{w}_2^{-\beta_4} (\beta_1 - \beta_3)$$

e idem para $z_2 \bar{z}_2$.

Então, nas novas variáveis

$$-iH = -i\omega_1 w_1 \bar{w}_1 - i\omega_2 w_2 \bar{w}_2 + A_{20} (w_1 \bar{w}_1)^2 + \dots + A_{0, \frac{N}{2}} (w_1 \bar{w}_2)^{N/2} +$$

$$\sum_{[\beta]=N+1} w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{\beta_3} \bar{w}_2^{\beta_4} \left\{ D_{\beta} + i S_{\beta} [\omega_1 (\beta_1 - \beta_3) + \omega_2 (\beta_2 - \beta_4)] \right\} + O(N+2)$$

Para o caso $\beta_1 \neq \beta_3$ e $\beta_2 \neq \beta_4$ escolhemos

$$S_{\beta} = \frac{-i D_{\beta}}{w_1 (\beta_1 - \beta_3) + w_2 (\beta_2 - \beta_4)} \quad (6)$$

e matamos todos esses "termos cruzados", sobrando apenas os "diagonais" $\beta_1 = \beta_3$ e $\beta_2 = \beta_4$ que não podem ser cancelados.

Com isso,

$$-iH = -i\omega_1 w_1 \bar{w}_1 - i\omega_2 w_2 \bar{w}_2 + \dots \dots A_{0, \frac{N}{2}} (w_2 \bar{w}_2)^{N/2} +$$

$$\sum_{[\beta]=N+1} D_{\beta_1 \beta_1 \beta_3 \beta_3} (w_1, \bar{w}_1)^{\beta_1} (w_2 \bar{w}_2)^{\beta_3} + O(N+2)$$

Voltando para variáveis reais através de

$$w_1 = \sqrt{I_1} e^{i\varphi_1}$$

$$w_2 = \sqrt{I_2} e^{i\varphi_2}$$

obtemos

$$H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \sum_{\ell+k=2}^{\frac{N+1}{2}} A_{\ell k} I_1^{\ell} I_2^k + O\left(\frac{N}{2}+1\right) \quad (7)$$

o que demonstra nossa proposição.

Fica claro da equação (6) a necessidade de que a "condição de ressonância" $\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 = 0$ não seja satisfeita. No entanto, isso não é suficiente para garantir a convergência da forma normal, pois o denominador da eq. (6) pode ficar arbitrariamente pequeno para N grande, implicando em coeficientes S_β muito grandes. Quanto "mais irracional" for a relação ω_1/ω_2 melhor a convergência. Esse resultado nos mostra de forma intuitiva que ressonâncias são muito instáveis quando submetidas a perturbações, enquanto que movimentos quasi-periódicos irracionais são mais resistentes, o que é essencialmente o resultado do teorema KAM que veremos adiante. Uma excelente discussão sobre regiões de convergência das formas normais pode ser encontrada no livro de Ozorio de Almeida (1991). Para o caso específico de sistemas Hamiltonianos que estamos discutindo, a forma normal só converge de fato se o sistema inicial, eq. (1), for integrável. Isso ocorre porque "convergência" aqui significa escrever $H = H(I)$ no limite $N \rightarrow \infty$ e implica que as ações são todas constantes do movimento. Se o sistema inicial é não-integrável, isso por definição não é possível.

Na verdade, o caso ressonante também pode ser tratado de forma bastante simples: suponha que $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{s} - \lambda$ de maneira que a ressonância ocorra quando o parâmetro λ se anula. Nesse caso, o denominador da eq. (6) se anula quando

$$[r(\beta_1 - \beta_3) + s(\beta_2 - \beta_4)] = 0$$

Escolhendo os betas de forma que $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ seja mínimo, obtemos os termos que não podem ser eliminados pela transformação canônica em ordem mais baixa. Uma análise simples mostra que esses termos são dados por

$$\beta_1 - \beta_3 = \pm s \quad \text{e} \quad \beta_2 - \beta_4 = \mp r \quad , \quad \text{ou}$$

$$\beta_1 = s \quad , \quad \beta_3 = 0 \quad , \quad \beta_2 = 0 \quad , \quad \beta_4 = r \quad \text{e}$$

$$\beta_1 = 0 \quad , \quad \beta_3 = s \quad , \quad \beta_2 = r \quad , \quad \beta_4 = 0$$

o que nos leva à FORMA NORMAL DE BIRKHOFF-GUSTAVSON:

$$-iH = \omega_1 w_1 \bar{w}_1 + \omega_2 w_2 \bar{w}_2 + \dots + A_{0, \frac{m-1}{2}} (w_2 \bar{w}_2)^{\frac{m-1}{2}} + D_{soor} w_1^{s-r} \bar{w}_2^r + D_{orso} \bar{w}_1^s w_2^r \quad ,$$

ou

$$H = (r/s - \lambda) I_1 + I_2 + \sum_{\ell+k=2}^{\frac{r+s}{2}} A_{\ell k} I_1^\ell I_2^k + \alpha I_1^{s/2} I_2^{r/2} \cos(s\varphi_1 - r\varphi_2) \quad (8)$$

Por simplicidade fizemos $\omega_2 = 1$, portanto $\omega_1 = r/s - \lambda$ e introduzimos α , um novo parâmetro que depende de D_{soor} . De fato, ambos os termos em cos e sin aparecem, mas um deles pode ser eliminado mudando-se ligeiramente a definição dos ângulos φ_1 e φ_2 .

Note que a Hamiltoniana acima continua integrável. De fato, a transformação canônica

$$\theta_1 = (s\varphi_1 - r\varphi_2)$$

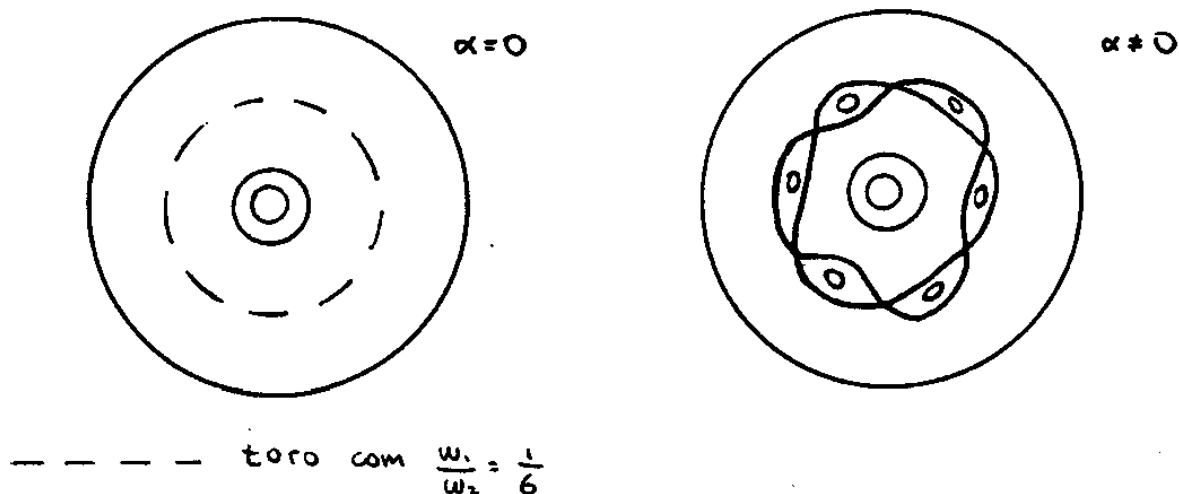
$$I_1 = sJ_1$$

$$\theta_2 = \varphi_2$$

$$I_2 = J_2 - sJ_1$$

faz com que a eq. (8) não dependa de θ_2 o que implica que, além da energia, J_2 é conservado.

A figura abaixo mostra um exemplo fictício de seção de Poincaré no caso de ressonância 6:1 ($\omega_1/\omega_2 = 1/6 - \lambda$). Se o parâmetro α é visto como uma perturbação temos:



Quando $\lambda \rightarrow 0$ as seis ilhas colapsam na origem.

Antes de fechar esse capítulo, vamos fazer uma pequena variação da forma normal ressonante que será extremamente útil para entendermos as bifurcações de órbitas periódicas. Consideremos agora uma Hamiltoniana com 1 grau de liberdade que dependa periodicamente do tempo com um ponto estável na origem:

$$H(q,p,t) = \frac{w}{2}(q^2 + p^2) + \sum_{\alpha+\beta=3}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} E_{\alpha\beta\ell} p^\alpha q^\beta e^{i\ell t} \quad ; \quad k \geq 3 \quad (9)$$

Assim como no caso de 2 graus de liberdade, procuramos fazer transformações canônicas $(q,p) \rightarrow (Q,P)$ que simplifiquem (9) além do termo quadrático e que, se possível, eliminem o tempo. Passando novamente para variáveis complexas z e $\bar{z}$ reescrevemos (9) na forma

$$-iH(z, \bar{z}, t) = -i\omega z \bar{z} + \sum_{\alpha+\beta=3}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{-\infty} F_{\alpha\beta\ell} z^{\alpha} \bar{z}^{\beta} e^{i\ell t} \quad ; \quad F_{\alpha\beta\ell} = -F_{\beta\alpha-\ell}^*$$

A função geratriz agora assume a forma

$$S(z, \bar{w}) = z \bar{w} + \sum_{\alpha+\beta=3}^{\infty} \sum_{\ell} S_{\alpha\beta\ell} z^{\alpha} \bar{w}^{\beta} e^{i\ell t}$$

o que leva às equações

$$\bar{z} = \bar{w} + \sum_{\ell, \alpha+\beta=3} \alpha S_{\alpha\beta\ell} w^{\alpha-1} \bar{w}^{\beta} e^{i\ell t} + O(4)$$

$$z = w - \sum_{\ell, \alpha+\beta=3} \beta S_{\alpha\beta\ell} w^{\alpha} \bar{w}^{\beta-1} e^{i\ell t} + O(4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{\alpha+\beta=3} \sum_{\ell} i\ell S_{\alpha\beta\ell} w^{\alpha} \bar{w}^{\beta} e^{i\ell t} + O(4) \quad .$$

Lembrando que da Hamiltoniana em termos de w e $\bar{w}$ deve ser subtraído o fator $\frac{\partial S}{\partial t}$, conseguimos cancelar todos os termos "não diagonais" com a escolha

$$S_{\alpha\beta\ell} = \frac{i F_{\alpha\beta\ell}}{\omega(\alpha-\beta)+\ell}$$

Esse processo pode ser continuado indefinidamente se ω é irracional, embora o problema dos pequenos denominadores continue aqui. O caso ressonante também pode ser tratado de forma idêntica à anterior: se $\omega = r/s + \varepsilon$, para $\varepsilon = 0$ o denominador acima se anula quando

$$r(\alpha - \beta) = -s\ell$$

Em ordem mais baixa possível essa condição é satisfeita quando

$$\alpha = s, \beta = 0, \ell = -r; \quad \alpha = 0, \beta = s, \ell = +r$$

ou

$$\alpha = \beta = \frac{s}{2}, \ell = 0.$$

Como esses termos não podem ser eliminados nossa Hamiltoniana fica

$$-iH = -i\omega w\bar{w} + F_2(w\bar{w})^2 + F_3(w\bar{w})^3 + \dots + \frac{F_s(w\bar{w})^{s/2}}{2} + (F_{s0} w^s e^{irt} + F_{0s}^* \bar{w}^s e^{-irt})$$

Note que a dependência temporal foi totalmente eliminada dos termos até ordem $s-1$, mas persiste nos termos de ordem s . Uma última transformação canônica, no entanto elimina o tempo também aí. Esta é gerada por

$$\sigma = w\bar{\xi} e^{i(r/s)t},$$

donde

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \bar{w} e^{-i(\frac{r}{s})t} \\ \xi = w e^{+i(r/s)t} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{ir}{s} \xi \bar{\xi} \end{cases}$$

Então, $w\bar{w} = \xi\bar{\xi}$ nas $w^s e^{irt} = \xi^s$ e

$$-iH(\xi, \bar{\xi}) = -i(\omega - \frac{r}{s})\xi\bar{\xi} + F_2(\xi\bar{\xi})^2 + \dots + F_{sor}\xi^s + F_{os-r}\bar{\xi}^s.$$

Voltando às variáveis reais I, φ através de $\xi = \sqrt{I} e^{i\varphi}$ e lembrando que $w = \frac{r}{s} + \varepsilon$,

$$H(I, \varphi, t) = \varepsilon I + \sum_{j=2}^{s/2} C_j I^j + \alpha I^{s/2} \cos(s\varphi) + O(s/2+1, t) \quad (10)$$

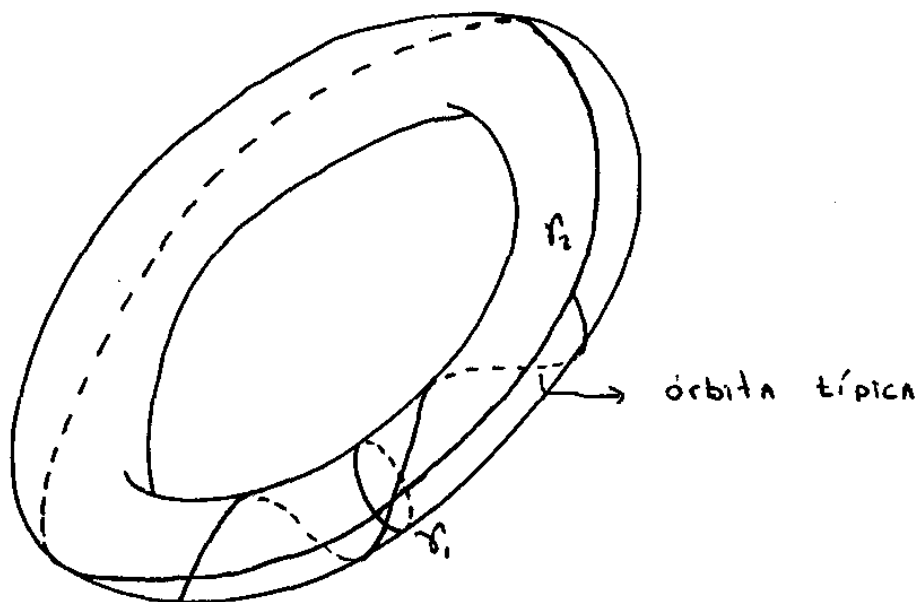
Notem que essa última transformação é equivalente à transformação de $(I, \varphi) \rightarrow (J, \theta)$ que fizemos no caso de 2 graus de liberdade. Essa nossa expressão (10) será extremamente útil para estudar bifurcações de órbitas periódicas no capítulo 4. Como veremos, o tempo fará o papel de uma coordenada angular ao longo da órbita periódica e a integração das equações de movimento entre 0 e 2π nos dará a seção de Poincaré analítica na vizinhança dessas órbitas.

III. O TEOREMA KAM E OS EMARANHADOS HOMOCLÍNICOS

Vamos considerar novamente um sistema integrável

$H(\underline{I}, \varphi) = H_0(\underline{I})$. Como vimos no capítulo I as órbitas de H_0 estão sobre toros invariantes indexados pelos valores assumidos por $\underline{I}$. O toro com $I_1 = C_1$ e $I_2 = C_2$, por exemplo, é tal que as frequências de rotação nos circuitos γ_1 e γ_2 (veja a figura abaixo) são

$$\omega_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \dot{\varphi}_i(I_1 = C_1, I_2 = C_2)$$

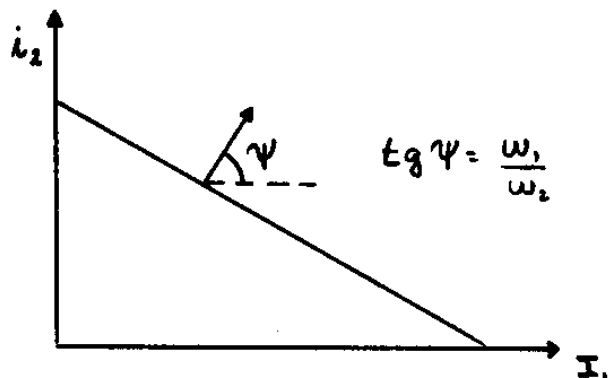


Fazendo $\omega_1/\omega_2 = p$, vemos que uma órbita sobre o toro $\underline{I} = (C_1, C_2)$ dá p voltas ao redor de γ_1 para cada volta ao redor de γ_2 . Se p é um racional, $p = r/s$, o toro é coberto por órbitas periódicas que fecham após terem completado s voltas em γ_2 e r em

γ_1 . Seja E a energia do toro: $H(C_1, C_2) = E$. Então, pelo teorema da função implícita, se $\frac{\partial H}{\partial I_2} \neq 0$, existe uma função $i_2(I_1)$ tal que $H(I_1, i_2(I_1)) = E$.

Exemplo $H(I_1, I_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 = E$

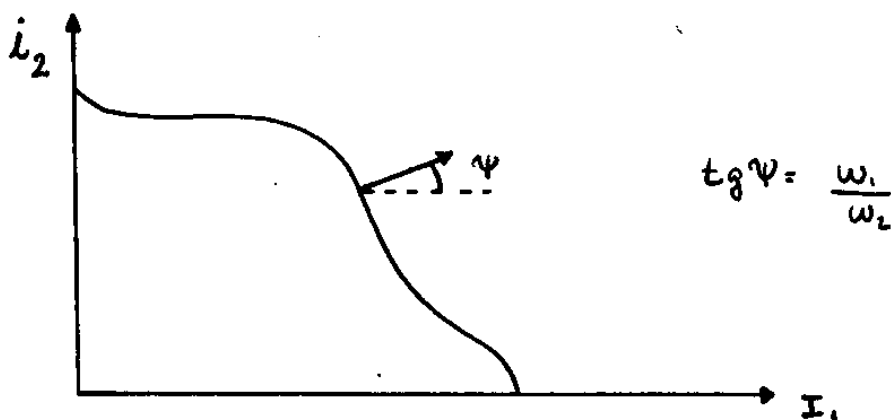
$$i_2(I_1) = (E - \omega_1 I_1) / \omega_2$$



Para cada valor de I_1 temos, na mesma superfície de energia, um toro diferente com

$$p(I_1) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{\partial H}{\partial I_1}}{\frac{\partial H}{\partial I_2}} = -\frac{\partial i_2}{\partial I_1}.$$

Ou seja, como no exemplo, a curva $i_2 = i_2(I_1)$ é tal que sua derivada fornece $-p$. Como os números racionais são densos nos irracionais, conforme I_1 varia, os toros periódicos (cujas órbitas são periódicas) ficam distribuídos densamente entre os toros irracionais (cujas órbitas nunca fecham).



Vamos agora perturbar esse sistema com um termo $H_1(I, \varphi)$ que quebre a integrabilidade de H_0 :

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \varphi) \quad (1)$$

No capítulo anterior vimos que se o movimento próximo da origem $I_1 = I_2 = 0$ é ressonante (ω_1/ω_2 racional) não conseguimos obter uma forma normal separável e uma cadeia de ilhas toma o lugar do toro racional. O mesmo raciocínio pode ser estendido para movimentos vizinhos a um toro fora da origem com $I_1 = C_1$, $I_2 = C_2$:

$$\begin{aligned} H_0(I) &= H_0(C) + \frac{\partial H_0}{\partial I_1}(I_1 - C_1) + \frac{\partial H_0}{\partial I_2}(I_2 - C_2) + \text{TOS} \\ &= H_0(C) + \omega_1 \delta I_1 + \omega_2 \delta I_2 + \text{TOS} \end{aligned}$$

onde TOS (Termos de Ordem Superior) contém o resto da série. Desprezando-se a constante $H_0(C)$ e agrupando $\text{TOS} + \epsilon H_1(I, \varphi)$, obtemos uma Hamiltoniana da forma (1).

Vemos então que sob o efeito de uma pequena perturbação todos os toros racionais de H_0 (não apenas aqueles próximos à origem), constituídos por uma infinidade de órbitas periódicas, são substituídos por cadeias de ilhas com um número par de órbitas periódicas, metade estável (no centro das ilhas) e metade instável (nas intersecções das ilhas). Esse resultado é conhecido como TEOREMA DE POINCARÉ-BIRKHOFF e uma demonstração mais geométrica desse resultado pode ser encontrada no trabalho de Berry (1978)

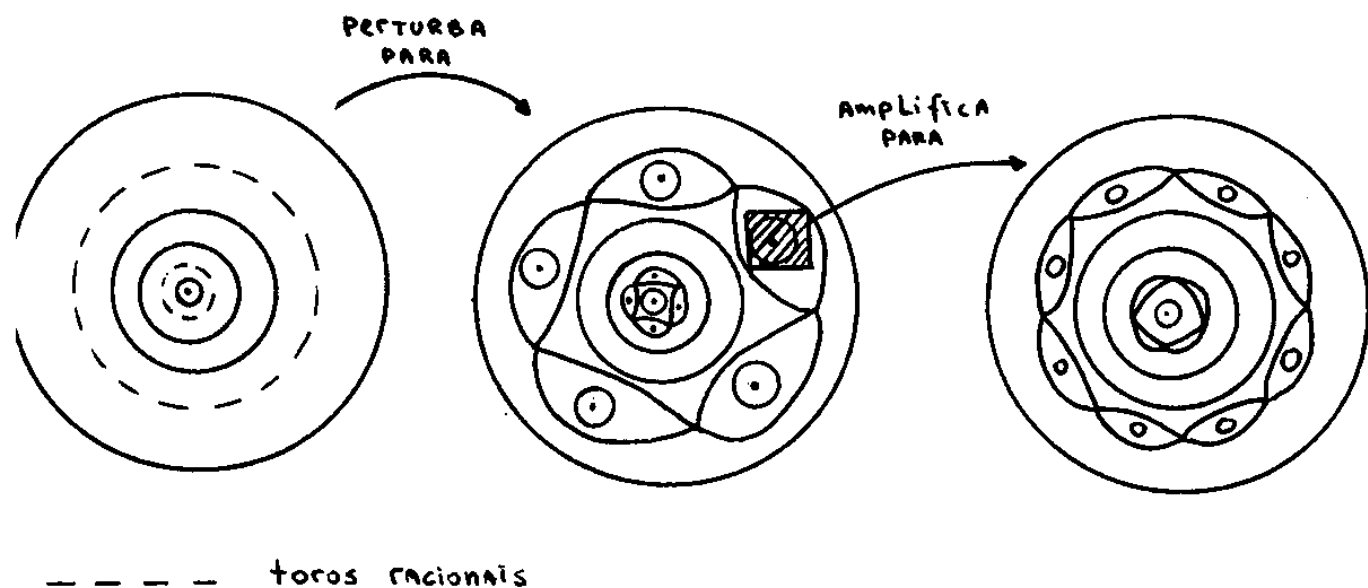
(veja nas referências). Mas, se esses toros racionais são densos no conjunto de todos os toros, será possível que algum toro irracional sobreviva, ainda que deformado, à perturbação H_1 ?

Esse é exatamente o resultado do Teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser):

"Se um sistema não perturbado é não-degenerado, então para perturbações suficientemente pequenas, a maioria dos toros invariantes não-ressonantes não desaparece, mas são apenas ligeiramente deformados. Esses toros formam a maioria, no sentido de que a medida do complemento de sua união é pequena quando a perturbação é pequena."

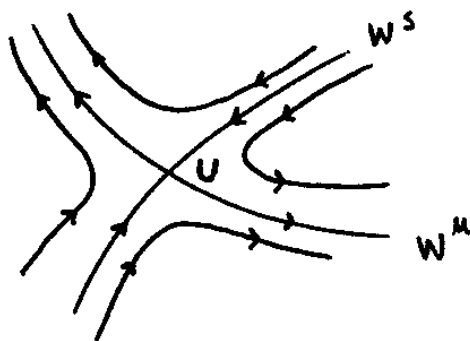
H_0 é dito não-degenerado se $\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i}$ — não são constantes, ou seja, dependem de I_1 e I_2 .

Como ficam então as órbitas nas regiões ocupadas anteriormente pelos toros racionais? Vimos que numa primeira aproximação aparecem cadeias de ilhas. Dentro de cada uma dessas ilhas surgem novos toros que, novamente, se alternam entre racionais e irracionais, e onde os racionais estariam surge, em menor escala, um outro conjunto de ilhas com órbitas periódicas estáveis e instáveis:



Temos então uma estrutura fractal no espaço de fases, onde cada pequena região em torno da seção de Poincaré de uma órbita periódica estável (ou ponto elíptico) é uma representação microscópica do todo!

Mas essa ainda não é toda a estória: a vizinhança da seção das órbitas instáveis, ou pontos hiperbólicos, também são fascinantes. Nesses pontos instáveis cruzam-se duas curvas que chamamos que variedades estável e instável (as "bordas" da ilha). Se P é o mapa de Poincaré e $\omega_1/\omega_2 = r/s$, então, ao longo da variedade estável, W^s , sucessivas iterações do mapa P^s fazem com que os pontos se aproximem do ponto fixo e ao longo da variedade instável, W^u , com que os pontos se afastem. Fora dessas curvas especiais, o movimento se dá sobre hiperbolas:



Como o ponto hiperbólico U é um ponto fixo de P^S (ou seja, uma órbita periódica de período s), a velocidade com que os pontos de W^S aproximam U diminui cada vez mais e temos

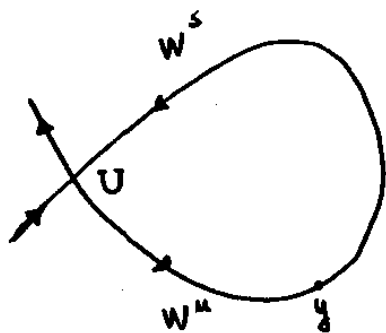
$$\lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = U \quad \text{se} \quad y \in W^S$$

e

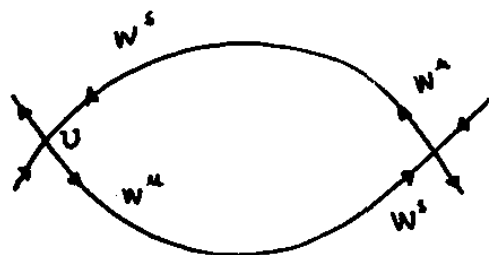
$$\lim_{m \rightarrow \infty} y^{(-m)} = U \quad \text{se} \quad y \in W^u$$

onde $y^{(m)} = (P^S)^m(y)$ e $y^{(-m)} = (P^S)^{(-m)}(y)$ são a m -ésima aplicação do mapa P^S para "frente" e para "trás" no tempo respectivamente. Ou seja, pontos em W^S se aproximam de U para $t \rightarrow \infty$ e pontos em W^u estavam sobre U em $t \rightarrow -\infty$. As curvas W^S e W^u são invariantes, no sentido de que $P^S(W^S) = W^S$ e $P^S(W^u) = W^u$ (pontos sobre as curvas são mapeados em pontos sobre as curvas).

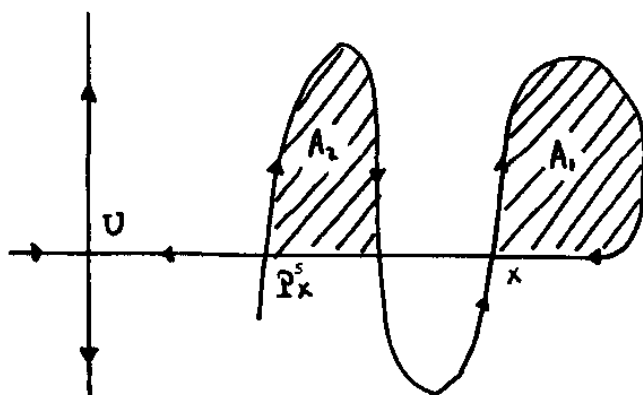
O que acontece quando seguimos as curvas W^S e W^u longe de U ? Para sistemas integráveis elas se encontram de maneira suave:



ou



Um ponto y sobre W^u é mapeado de U à U depois de uma dupla infinidade de iterações do mapa. Mas isso não é o que acontece em geral. Uma coisa que não pode acontecer é que W^s cruze consigo mesmo:

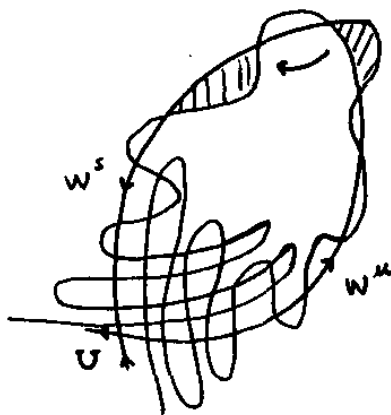
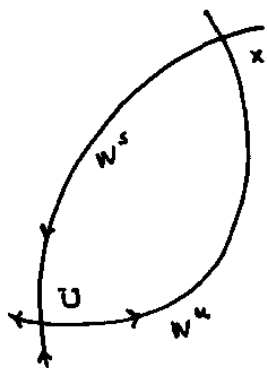


Se tal intersecção ocorre em x , então a imagem desse ponto, $P^s x$ deve ser também uma intersecção. Além disso a área hachurada A_1 é mapeada em A_2 e deve ser preservada. Isso no entanto não é possível pois segmentos sobre W^u , p.e., devem ser mapeados sobre segmentos menores, que não conseguem envolver a mesma área.

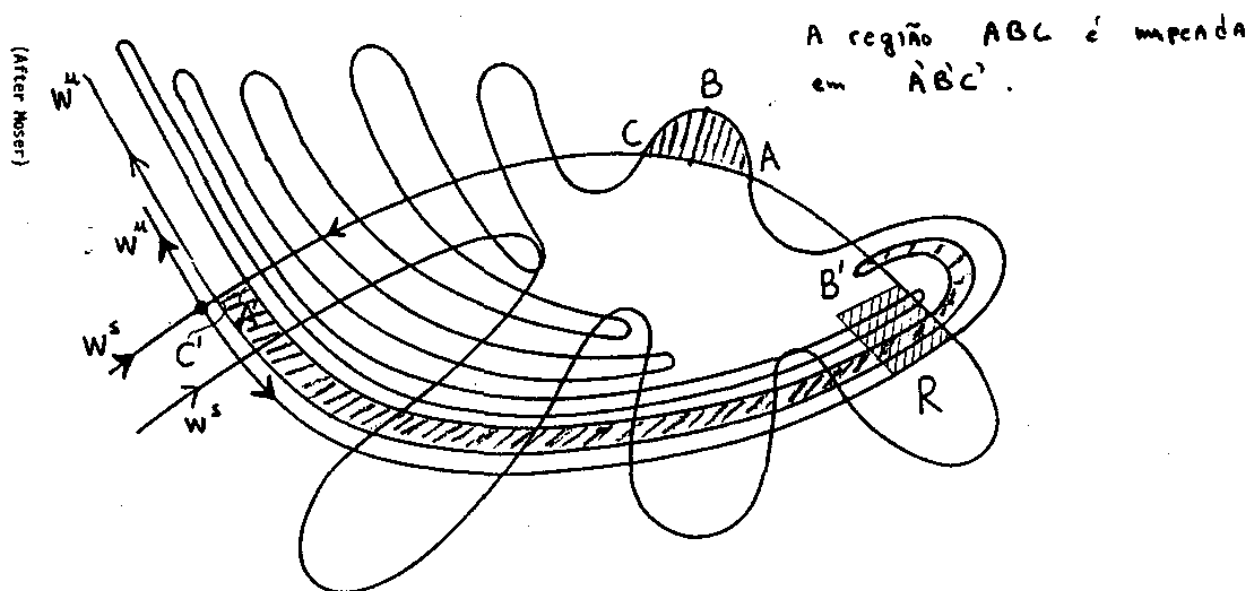
No entanto, o que pode ocorrer, e de fato ocorre, é que W^s cruze com W^u . Os pontos x onde ocorrem esses cruzamentos são chamados de pontos homoclínicos se W^s e W^u pertencem a pontos

fixos de uma mesma órbita periódica instável, e pontos heteroclínicos quando w^s e w^u pertencem a órbitas diferentes. Vamos considerar apenas os pontos homoclínicos aqui.

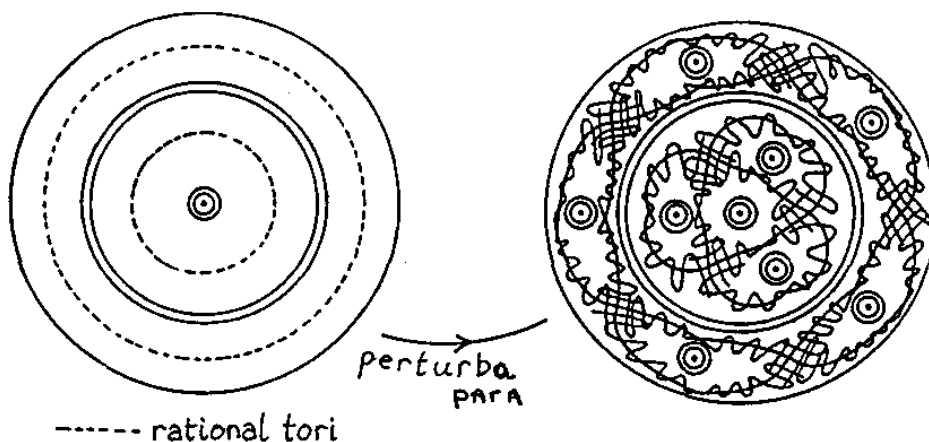
Considere um ponto homoclínico em x . Como as curvas w^s e w^u continuam depois de x ? Para responder essas perguntas vamos considerar as iterações $(P^S)^m$ ($-\infty < m < \infty$) das vizinhanças de x . Por continuidade, essas iterações sucessivas têm que ser parecidas com a vizinhança original de x . Portanto, w^s e w^u devem se cruzar em todas essas vizinhanças: só um ponto homoclínico é impossível e a existência de um implica na existência de infinitos outros! Então w^s forma uma série de loops intersectando w^u e vice-versa (veja as figuras abaixo). Além disso, em todo ponto de w^u entre duas intersecções sucessivas de w^s ocorre também outra intersecção. Isso vem porque P^S preserva área no espaço de fases: sem outras intersecções, a área hachurada da figura seria mapeada em cada loop sucessivo, sem mudar a área do loop, e isso não poderia ocorrer indefinidamente dentro de uma região com área finita.



O movimento de zig-zag das variedades estável e instável é complicadíssimo e é responsável pela geração de movimentos caóticos na vizinhança dos pontos hiperbólicos. Esse zig-zag é chamado de emaranhado homoclínico, e uma ilustração um pouco melhor ficaria assim:

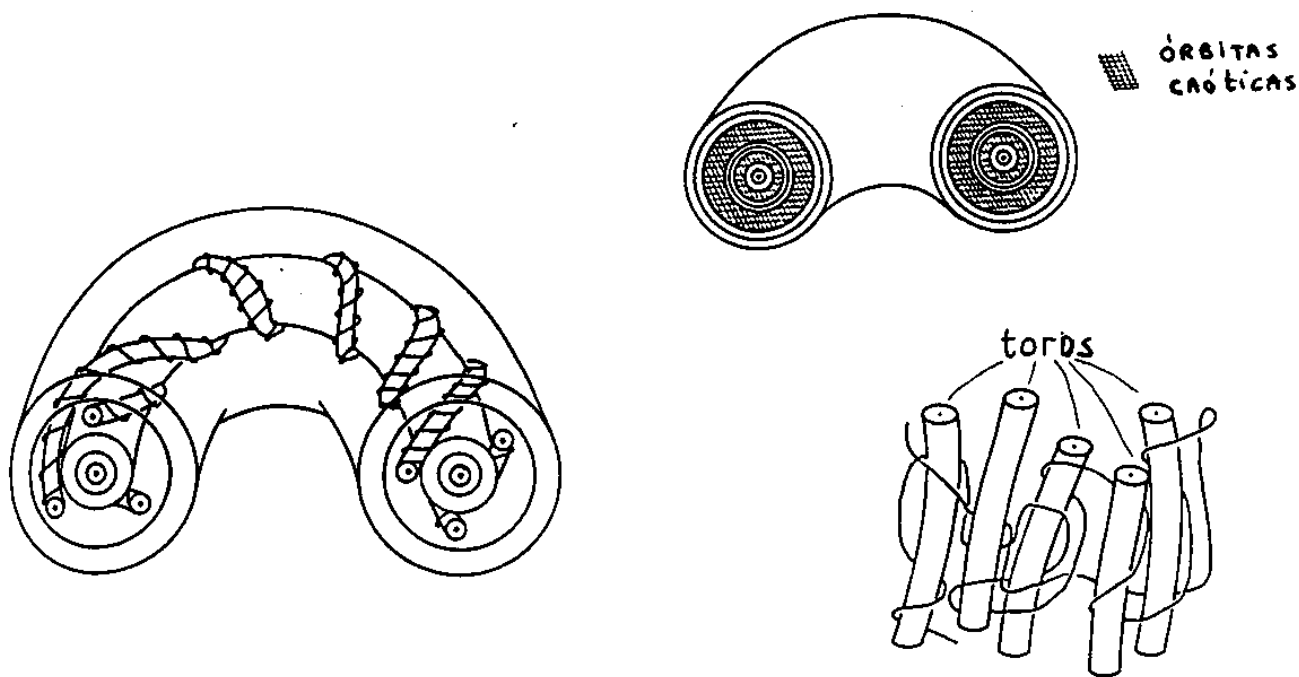


Podemos agora construir um quadro mais completo do que ocorre quando perturbamos um sistema integrável:



As figuras abaixo mostram uma visão do que ocorre na

superfície de energia (da qual o mapa P^S é uma seção transversal).



Podemos agora olhar novamente as figuras apresentadas no final do capítulo 1 e entendermos o que está se passando: A separatriz integrável quebra-se quando $\beta \neq 0$ dando origem ao emaranhado homoclínico; aparecem cadeias de ilhas onde haviam toros racionais; toros irracionais ainda existem.

É importante nesse ponto discutir o significado da palavra CAOS. Um sistema dinâmico é dito caótico quando trajetórias vizinhas arbitrariamente próximas separam-se exponencialmente com a evolução do sistema. O caos, ou imprevisibilidade, vem do fato que qualquer "erro" na condição inicial propaga-se rapidamente e em pouco tempo a incerteza no estado do sistema torna-se muito grande. Isso é exatamente o que ocorre dentro do emaranhado homoclínico. Cada pequeno segmento (por exemplo sobre W^S ou W^u) é esticado e curvado de tal forma que seus extremos, considerados como condições iniciais próximas, se

afastam exponencialmente um do outro. Essa sensibilidade às condições iniciais se manifesta de forma intensa em cálculos numéricos, onde o "erro mínimo" é igual à precisão da máquina.

IV. ÓRBITAS PERIÓDICAS E BIFURCAÇÕES

1. Introdução

Dentro de toda complexidade apresentada pelos sistemas não integráveis, onde órbitas quase-periódicas sobre toros se misturam com órbitas caóticas instáveis, uma estrutura simples ainda sobrevive imersa nesse emaranhado: as órbitas periódicas. Essas órbitas são densas no espaço de fases, no sentido de que, dado qualquer ponto existe uma órbita periódica passando arbitrariamente próxima, ainda que de período muito longo. Podemos visualizar o conjunto de órbitas periódicas (O.P.) da seguinte forma: fixando um período máximo τ_m , as O.P. na superfície de energia E com $\tau < \tau_m$ são poucas e distribuídas de maneira irregular se τ_m é pequeno. Aumentando τ_m , o número de O.P. aumenta rapidamente (exponencialmente, na verdade) e sua distribuição se torna cada vez mais uniforme (veja, p.e., o trabalho de Hannay e Ozorio de Almeida (1984)). Dessa forma, as O.P. formam uma espécie de esqueleto por entre o qual as órbitas caóticas ou quasi-periódicas passeiam. Note que apesar de denso o conjunto das O.P. tem medida nula, no sentido de que ocupam volume zero dentro do espaço de fases.

Além disso, como veremos no último capítulo, as órbitas periódicas desempenham um papel fundamental da teoria semiclássica de sistemas não-integráveis. A famosa fórmula do traço de Gutzwiller relaciona níveis de energia com as órbitas periódicas no limite $\hbar \rightarrow 0$. Nesse capítulo descreveremos a teoria linear de

O.P. e em seguida usaremos os resultados das formas normais do capítulo 2 para descrever suas bifurcações, um fenômeno intrinsecamente não-linear.

2. Teoria Linear

Em sistemas integráveis com 2 graus de liberdade as órbitas periódicas se agrupam em famílias a 2 parâmetros, que podem ser, por exemplo, a energia (do toro periódico) e mais um parâmetro sobre o toro que identifique uma só órbita. Em sistemas não-integráveis os toros periódicos já não existem, mas as O.P. continuam a formar famílias a um único parâmetro, que pode ser a energia ou o período, por exemplo.

Vamos desenvolver aqui a teoria para 2 graus de liberdade apenas, embora muitos resultados sejam gerais para N graus. Sejam

$$\omega = \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial p_x} \\ \frac{\partial}{\partial p_y} \end{pmatrix} \quad (1)$$

e

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, as equações de Hamilton ficam compactadas na forma

$$\dot{\omega} = J\nabla H(\omega) \quad (2)$$

Seja também ω_0 uma órbita periódica de período τ_0 e energia E_0 :

$$\omega_0(t+\tau_0) = \omega_0(t)$$

$$H(\omega_0) = E_0$$

Podemos extrair bastante informação sobre ω_0 se estudarmos o comportamento das órbitas vizinhas. Considere um pequeno desvio em relação à ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + \xi$$

Substituindo em (2) e expandindo até primeira ordem em ξ obtemos:

$$\dot{\omega}_0 + \dot{\xi} = J\nabla H(\omega_0) + JH''(\omega_0)\xi$$

ou

$$\dot{\xi} = JH''(\omega_0)\xi \quad (3)$$

pois ω_0 é solução das equações de Hamilton. Aqui definimos

$$(H'')_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial \omega_i \partial \omega_j}$$

Note que H'' depende do tempo periodicamente via ω_0 . A solução da equação linear (3) pode ser escrita na forma

$$\xi(t) = M(t)\xi(0) \quad ; \quad M(0) = I$$

e, depois de propagar a perturbação $\xi(0)$ por um período encontramos

$$\xi(\tau_0) = M(\tau_0)\xi(0) \tag{4}$$

A matriz $M(\tau_0)$ é chamada de Matriz de Monodromia e contém informações muito importantes a cerca da estabilidade da órbita ω_0 . Pode-se mostrar que $M(t)$ é simplética, ou seja, que

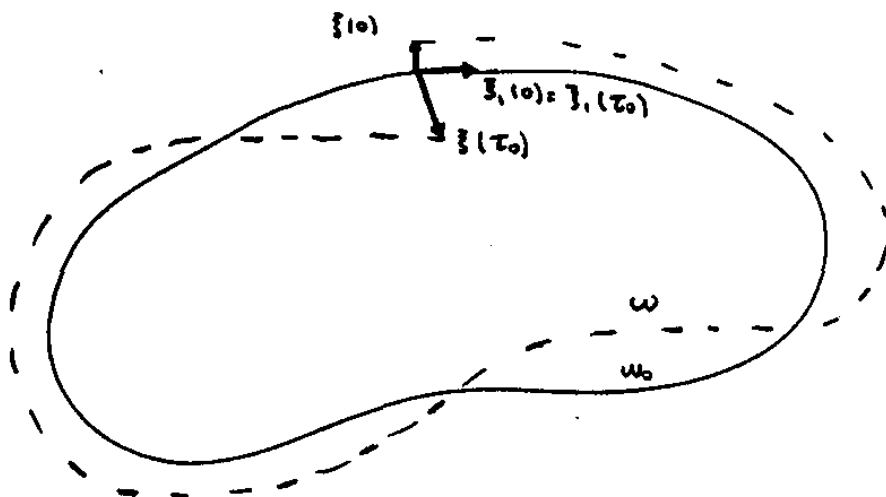
$$M^T = JM^{-1}J^{-1} \quad .$$

Como os autovalores de uma matriz transposta são iguais ao da própria matriz e como a transformação acima de M^{-1} é ortogonal, os autovalores de M são os mesmos de M^{-1} . Isso implica que os autovalores de M aparecem em pares de inversos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2^{-1} \\ \lambda_3 &= \lambda_4^{-1} \end{aligned} \quad . \tag{5}$$

Além disso, existe um auto-valor trivial de M : se tomamos um deslocamento $\xi_1(0)$ paralelo à ω_0 , $\xi_1(0) = \dot{\omega}_0(0) \cdot \delta t$,

então $(\omega_0 + \xi_1)(0) = \omega_0(0) + \dot{\omega}_0 \delta t = \omega_0(\delta t)$. Ou seja, $\omega(0) = \omega_0(\delta t)$ e estamos sobre a mesma O.P.. Portanto $\omega(\tau_0) = \omega(0)$, ou $\xi_1(\tau_0) = M(\tau_0)\xi_1(0) = \xi_1(0)$. Temos então que $\xi_1(0)$ é auto-vetor de $M(\tau_0)$ com auto-valor $\lambda_1 = 1$:

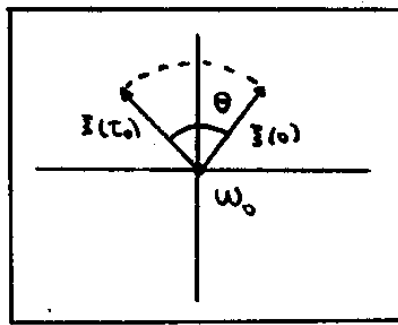


De (5) temos que existe outro auto-valor $\lambda_2 = 1$. Então, sobram apenas 2 opções para λ_3 e λ_4 , que classificam ω_0 como sendo estável ou instável:

CASO ESTÁVEL

$$\lambda_3 = e^{i\theta} \quad , \quad \lambda_4 = e^{-i\theta} \quad , \quad \theta \text{ real}$$

Nesse caso, como $|\lambda_i| = 1$, órbitas vizinhas permanecem sempre à mesma distância de ω_0 . Uma seção de Poincaré perpendicular à ω_0 mostraria o seguinte:

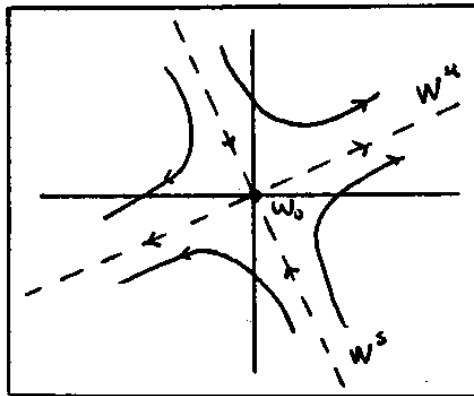


O ângulo $\theta(E)$ é chamado de ângulo de estabilidade da órbita ω_0 .

CASO INSTÁVEL

$$\lambda_3 = \pm e^{\mu} \quad , \quad \lambda_4 = \pm e^{-\mu} \quad , \quad \mu \text{ real} \quad .$$

Agora, se $\lambda_3 < 1$, $\lambda_4 > 1$ (e vice-versa). Isso mostra que existe uma direção ao longo da qual órbitas vizinhas se afastam de ω_0 e outra em que se aproximam. Essas direções são dadas pelos respectivos auto-vetores ξ_4 e ξ_3 de $M(\tau_0)$ e são aproximações lineares para as variedades instável e estável do último capítulo:



Note que a estabilidade da órbita é completamente determinada pelo traço de $M(\tau_0)$: se $0 < \text{tr } M(\tau_0) < 4 \omega_0$ é estável e se $\text{tr } M < 0$ ou $\text{tr } M > 4 \omega_0$ é instável. Se $\lambda_3, \lambda_4 > 0$ dizemos que a órbita é direta e se $\lambda_3, \lambda_4 < 0$ que ela é inversa.

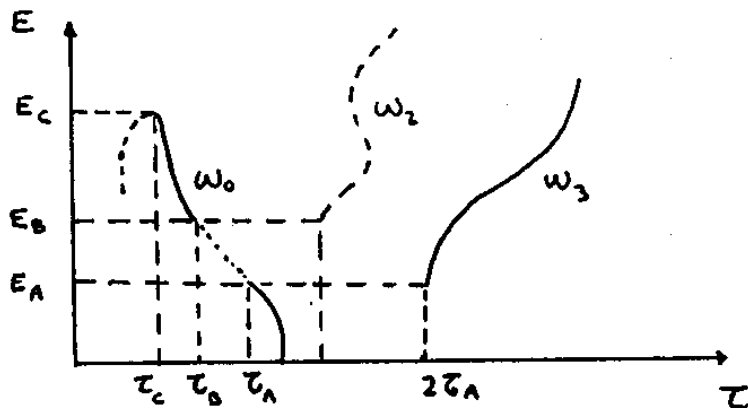
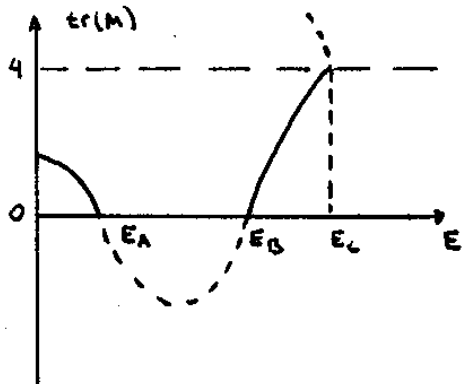
O caso estável tem a seguinte propriedade: se $\theta = 2\pi r/s$, então

$$\xi(\tau_0) = M(\tau_0)\xi(0) = e^{2\pi i r/s}\xi(0)$$

e após s iterações do mapa linear temos que

$$\xi(s\tau_0) = \left[M(\tau_0) \right]^s \xi(0) = e^{2\pi i r}\xi(0) = \xi(0) .$$

Ou seja, a órbita $\omega = \omega_0 + \xi$ também é periódica com período $\tau = s\tau_0$. ω é dita ter bifurcado de ω_0 na energia ε onde $\theta(\varepsilon) = 2\pi r/s$. O diagrama abaixo mostra alguns exemplos de bifurcações:

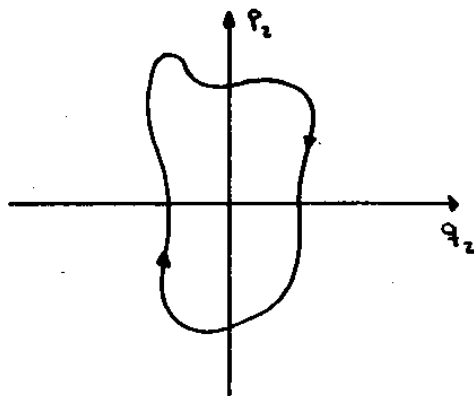
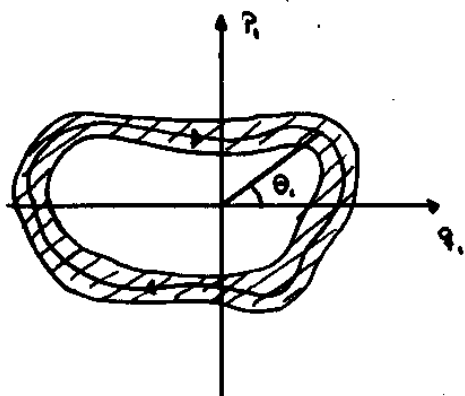


3. Formas Normais

A teoria linear que desenvolvemos acima dá indicações dos valores de energia ao longo da família ω_0 aonde podem ocorrer bifurcações, mas não nos dá nenhum tipo de informação com relação

ao número de órbitas bifurcadas (que pode ser zero, p.e.) ou com respeito à estabilidade dessas novas órbitas. Isso vem com a inclusão de termos não lineares na nossa análise perturbativa.

A figura abaixo mostra uma projeção de ω_0 nos planos (q_1, p_1) e (q_2, p_2) :



Em termos de variáveis de ação e ângulo, $H = H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$. Fixando um ponto de referência sobre a órbita periódica, podemos usar, em vez do tempo, a própria coordenada θ_1 para localizar um ponto na trajetória. Como órbitas suficientemente próximas a ω_0 devem acompanhar mais ou menos o seu trajeto, esse argumento também vale para pequenas perturbações em relação a ω_0 . Formalmente isso equivale a inverter $E = E(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$ e escrever

$$I_1 = I_1(I_2, \theta_2, -\theta_1, E) \equiv h_E(I_2, \theta_2, \mu)$$

onde E funciona como um parâmetro, $\mu \equiv -\theta_1$ e h_E é a Hamiltoniana Reduzida na vizinhança de ω_0 . Então,

$$\frac{d}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{d}{du} = -\dot{\theta}_1 \frac{d}{du} \quad ,$$

$$\frac{dI_2}{du} = \frac{1}{\dot{\theta}_1} \frac{dI_2}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial I_1} \right)^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta_2} \right) = -\frac{\partial I_1}{\partial \theta_2} = -\frac{\partial h_E}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{d\theta_2}{du} = \frac{1}{\dot{\theta}_1} \frac{d\theta_2}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial I_1} \right)^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial I_2} \right) = \frac{\partial I_1}{\partial I_2} = \frac{\partial h_E}{\partial I_2}$$

Temos então equações de Hamilton para I_2 e θ_2 com h_E onde o "tempo" é agora $u = -\theta_2$. Note que $\dot{\theta}_1$ deve permanecer diferente de zero durante o movimento, ou seja, as trajetórias vizinhas devem acompanhar ω_0 sem "voltar para trás". Além disso, h é periódica no tempo u com período 2π . Voltando para (q_2, p_2) em vez de (I_2, θ_2) e expandindo em torno de ω_0 ,

$$q_2 = q_{20} + q$$

$$p_2 = p_{20} + p$$

obtemos, de forma geral,

$$h = h(q_{20}, p_{20}, u) + A_1(u)q + A_2(u)p + \frac{A_{20}}{2} q^2 + A_{11}qp + \frac{A_{02}}{2} p^2 + \dots$$

Os termos lineares podem ser eliminados fazendo-se $q \rightarrow q + \frac{A_1}{A_{20}}$ e $p \rightarrow p + \frac{A_2}{A_{02}}$, o que equivale a 'completar o quadrado'. Desprezando-se os termos que só dependem de u (pois esses não afetam as equações de movimento), ficamos com

$$h = \frac{A_{20}}{2}(u)q^2 + A_{11}(u)qp + \frac{A_{02}}{2}(u)p^2 + \dots$$

Uma última transformação canônica dependente do tempo vai colocar h numa forma que nos é conhecida: Para isso note que em 1ª ordem as equações para q e p ficam (o ponto '.' significa derivada com relação à u)

$$\dot{x} = JH''x$$

$$\text{onde } x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}; \quad H''(u) = H''(u+2\pi) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{02} \\ -A_{20} & -A_{11} \end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cujas solução tem a forma

$$x(u) = e^{2\pi\Lambda(u)} x(0) \quad ; \quad \Lambda(0) = 0$$

Definindo y através de $x = B(u)y$ com

$$B(u) = e^{\int_0^u JH'' du} e^{-J\Lambda(2\pi)u}$$

obtemos

$$\dot{x} = \dot{B}y + B\dot{y} = \left[JH'' e^{-\int_0^u JH'' du} e^{-J\Lambda(2\pi)u} + e^{\int_0^u JH'' du} (-J\Lambda(2\pi)) e^{-J\Lambda(2\pi)u} \right] y + B\dot{y}$$

$$= [JH''B - \Lambda(2\pi)BJ]y + B\dot{y} \equiv (JH'')(By)$$

e portanto,

$$\dot{y} = \Lambda(2\pi)Jy \equiv \omega Jy$$

Ou seja, eliminamos a dependência temporal por termos quadráticos da Hamiltoniana e ficamos com

$$h(q,p,u) = \frac{w}{2}(q^2+p^2) + \sum_{\alpha+\beta=3}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} E_{\alpha\beta\ell} q^\alpha p^\beta e^{i\ell u} \quad (6)$$

onde usamos novamente q e p em vez de novos q' e p' .

Quem é ω ? Ora, mantendo só a aproximação linear temos que

$$q(u) = e^{i\omega u} q(0) \Rightarrow q(2\pi) = e^{2\pi i\omega} q(0)$$

e $2\pi\omega = \theta$, o ângulo de estabilidade da órbita! As bifurcações ocorrem então para $\omega = r/s$ e podemos expandir (6) na sua forma normal ressonante (veja o capítulo 2) e obtemos, em termos de variáveis de ação e ângulo,

$$h(I, \varphi, u) = \epsilon I + \sum_{j=2}^{s/2} C_j I^j + \alpha I^{s/2} \cos(s\varphi) + O(s/2+1, u)$$

Note que essa expressão só vale para $s \geq 3$, caso contrário os termos "pequenos", de ordem I^j , ficam maiores ou iguais que o termo "dominante" ϵI nas vizinhanças de $I = 0$. Lembre também que aqui $\omega = r/s + \epsilon$ onde ϵ é muito pequeno. Aqui, ϵ é o "parâmetro de bifurcação", e não α , que não precisa ser necessariamente pequeno.

As equações de movimento ficam

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial h}{\partial I} \approx \epsilon + \sum_{j=2}^{s/2} C_j j I^{j-1} + \alpha \frac{s}{2} I^{s/2-1} \cos(s\varphi)$$

$$\dot{I} = -\frac{\partial h}{\partial \varphi} \approx \alpha I^{s/2} \sin(s\varphi) \quad .$$

Integrando de 0 a 2π na aproximação $\varphi \sim \varphi_0$, $I \sim I_0$ para o lado direito obtemos um Mapa de Poincaré P, que a cada iteração já contém uma rotação de $2\pi r/s$ (veja a última transferência canônica no Cap. 2):

$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi\epsilon + \sum_{j=2}^{s/2} 2\pi j C_j I_0^{j-1} + \pi\alpha s I_0^{s/2-1} \cos(s\varphi_0) \quad (7)$$

$$I_1 = I_0 + 2\pi\alpha s I_0^{s/2} \sin(s\varphi_0) \quad .$$

Note que as bifurcações de ordem s que procuramos são pontos fixos do mapa P diretamente, e não de P^s . Claro que $(I, \varphi) = (0, 0)$ é ponto fixo do mapa e corresponde à órbita periódica "central" ω_0 . Os casos $s = 1$ e 2 não podem ser tratados dessa maneira e os casos $s = 3$ e 4 apresentam algumas particularidades. Como exemplo faremos aqui $s \geq 5$.

Definindo

$$I = R\epsilon$$

o mapa P fica

$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi\epsilon(1 + 2C_2 R_0) + O(\epsilon^{3/2}) \quad (8)$$

$$R_1 = R_0 + 2\pi\alpha s \epsilon^{s/2-1} R_0^{s/2} \sin(s\varphi_0) \quad ,$$

com pontos fixos dados pelas condições $\varphi_1 = \varphi_0$ e $R_1 = R_0$, ou seja, para

$$R = -1/(2C_2)$$

e

$$\begin{cases} \varphi_n^a = \frac{2n\pi}{s} \\ \varphi_n^b = \frac{(2n+1)\pi}{s} \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots, s-1$$

Os conjuntos $(R = -1/(2C_2), \varphi_n^a)$ e $(R = -1/(2C_2), \varphi_n^b)$ correspondem a duas órbitas periódicas distintas de período s . Em $\varepsilon = 0$, exatamente na ressonância, $I = R\varepsilon = 0$ e elas colapsam em ω_0 . Para $\varepsilon > 0$ elas descolam de ω_0 , realizando a bifurcação.

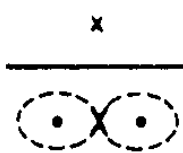
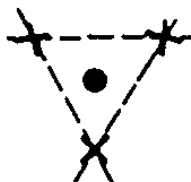
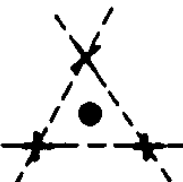
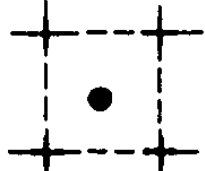
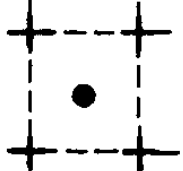
A estabilidade desses pontos fixos é obtida olhando-se os autovalores da matriz $\frac{\partial(R_s, \varphi_s)}{\partial(R_0, \varphi_0)}$ em cada órbita. Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} \lambda_a &= 1 \pm \sqrt{8\pi^2 s^3 C_2 \varepsilon^{s/2}} \\ \lambda_b &= 1 \pm \sqrt{-8\pi^2 s^3 C_2 \varepsilon^{s/2}} \end{aligned}.$$

Então, se $C_2 > 0$, a órbita a é instável e b estável e vice-versa se $C_2 < 0$. Um desenho do mapa no caso $s = 6$ ficaria como aquele mostrado no capítulo 2.

A tabela abaixo mostra uma classificação completa das

bifurcações genéricas em sistemas Hamiltonianos com 2 graus de liberdade obtida por Meyer:

S	PONTOS FIXOS DE $\mathcal{P}$ PARA $E > 0$	PONTOS FIXOS DE $\mathcal{P}$ PARA $E < 0$
1		
2		
3		
4a		
4b		
5		
> 5	EXTENSÃO	DO CASO 5

Esses resultados são válidos no chamado 'caso genérico', onde nenhum tipo especial de comportamento é esperado. Sistemas invariantes por certas simetrias, por exemplo, seguem outro padrão de bifurcações, como pode ser visto nos trabalhos do autor citados nas referências.

V. CÁLCULO NUMÉRICO DE ÓRBITAS PERIÓDICAS

1. Introdução

Apresentamos nesse capítulo duas versões do método desenvolvido por M. Baranger para o cálculo de órbitas periódicas. Os leitores avessos a computação podem pular esse capítulo, embora o método que segue seja muito interessante e valha a pena dar uma olhada. Consideraremos aqui apenas o caso de uma partícula movendo-se sob a ação de um potencial, com Hamiltoniana da forma

$$H(x,y,p_x,p_y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + V(x,y) \quad . \quad (1)$$

A extensão para mais graus de liberdade é imediata. A extensão para Hamiltonianas gerais (com campos magnéticos, por exemplo) também é possível, porém mais complicada.

2. O Período como Parâmetro

Vamos usar diretamente as Eqs. de Newton, em vez das de Hamilton:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \equiv -V_x \\ \ddot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial y} \equiv -V_y \end{aligned} \quad (2)$$

Seja T o período da órbita que estamos procurando.

Fazemos então uma discretização das eq. (2) distribuindo N pontos com espaçamento temporal uniforme ϵ ao longo da órbita:

$$T = N \cdot \epsilon$$

$$f(t) = f_n$$

$$\ddot{f}(t) = (f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) / \epsilon^2$$

o que leva (2) à forma

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + \epsilon^2 v_x(x_n, y_n) = 0 \quad (3)$$

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} + \epsilon^2 v_y(x_n, y_n) = 0$$

Seja agora o conjunto de $2N$ pontos $\{x_n^0, y_n^0\}_{n=1,2,\dots,N}$ uma solução tentativa para nossa órbita. Escrevemos então a solução exata como

$$x_n = x_n^0 + x'_n \quad (4)$$

$$y_n = y_n^0 + y'_n \quad ,$$

substituímos em (3) e expandimos até 1ª ordem em x'_n e y'_n , o que resulta em

$$x'_{n+1} - 2x'_n + x'_{n-1} + \epsilon^2 v_{xx}^0 x'_n + \epsilon^2 v_{xy}^0 y'_n = a_n$$

(5)

$$y'_{n+1} - 2y'_n + y'_{n-1} + \epsilon^2 v_{xy}^0 x'_n + \epsilon^2 v_{yy}^0 y'_n = b_n$$

Definindo

$$z_n = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ x'_{n-1} \\ y'_{n-1} \end{pmatrix} ; \quad c_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad U_N = \begin{pmatrix} P_N & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_n = \begin{pmatrix} 2 - \epsilon^2 v_{xx}^0(n) & -\epsilon^2 v_{xy}^0(n) \\ -\epsilon^2 v_{xy}^0(n) & 2 - \epsilon^2 v_{yy}^0(n) \end{pmatrix} , \quad (6)$$

as equações (5) ficam simplesmente

$$\boxed{z_{n+1} = U_n z_n + c_n} \quad (7)$$

onde

$$a_n = -x_{n+1}^0 + 2x_n^0 - x_{n-1}^0 - \epsilon^2 v_x^0(n)$$

$$b_n = -y_{n+1}^0 + 2y_n^0 - y_{n-1}^0 - \epsilon^2 v_y^0(n)$$

Iterando (7) obtemos

$$z_2 = U_1 z_1 + c_1$$

$$z_3 = U_2 U_1 z_1 + U_2 c_1 + c_2$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ Z_{N+1} = M_1 Z_1 + B \end{array} \quad (8)$$

onde

$$M_1 = U_N U_{N-1} \dots U_2 U_1 \quad (9)$$

$$B = U_N U_{N-1} \dots U_2 C_1 + U_N U_{N-1} \dots U_3 C_2 + \dots U_N C_{N-1} + C_N$$

Para que a órbita seja periódica, impomos $Z_{N+1} = Z_1$, o que leva à uma equação para Z_1 apenas:

$$Z_1 = M_1 Z_1 + B \quad ,$$

ou

$$\boxed{Z_1 = (1 - M_1)^{-1} \cdot B} \quad (10)$$

Uma vez calculado Z_1 , calculamos Z_2, Z_3 , etc. com (7) e usando (4) teremos nossa órbita tentativa corrigida. Agora é só iterar o processo até a precisão desejada.

Três características desse método devem ser ressaltadas:

- 1) É necessário uma órbita tentativa razoável para inicializar o processo. Isso pode ser obtido com uma solução harmônica

próxima aos pontos de equilíbrio de H. Uma vez uma órbita com período T é obtida, ela pode ser usada como tentativa para a órbita com período $T + \delta T$ da mesma família. Dessa forma as famílias no gráfico energia x período são construídas (veja o capítulo 4).

- 2) O processo iterativo converge muito rapidamente. Com 1 minuto de CPU num VAX 780 podem ser calculadas da ordem de 10 órbitas de uma mesma família.
- 3) No fim do processo iterativo a matriz M_1 , Eq. (9), é a matriz de monodromia da órbita periódica. Seus auto-valores contém toda informação necessária para conhecermos sua estabilidade e estudarmos suas bifurcações.

Uma pequena variação desse método permite que calculemos a órbita com energia E , em vez de com períodos T . Fixar a energia é, na maioria das vezes, preferível do que fixar o período.

3. A Energia como Parâmetro

Entrar com a energia média sobre todos os pontos como parâmetro é bastante complicado. Para simplificar usamos a energia do primeiro ponto apenas. Note que como E ficará fixo, o período T (na verdade $\underline{\varepsilon}^2$) terá que ser ajustado. Temos que

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} [V(x_1, y_1) + V(x_2, y_2)] \quad .$$

A correção na energia do primeiro ponto devida à uma correção na

órbita e no período é

$$\begin{aligned} \delta E_1 &= \left(\frac{x_2^0 - x_1^0}{\epsilon^2} \right) (x_2' - x_1') + \left(\frac{y_2^0 - y_1^0}{\epsilon^2} \right) (y_2' - y_1') + \frac{1}{2} [v_x(1)x_1' + v_y(1)y_1' + v_x(2)x_2' + \\ &\quad + v_y(2)y_2'] - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x_2^0 - x_1^0}{\epsilon^2} \right)^2 + \left(\frac{y_2^0 - y_1^0}{\epsilon^2} \right)^2}{\left(\epsilon^2 \right)^2} \delta(\epsilon^2) \\ &= \Delta_1 \cdot Z_1 - \Omega_1 \delta(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (10)$$

onde

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_2^0 - x_1^0}{\epsilon^2} + \frac{v_x(2)}{2} \\ \frac{y_2^0 - y_1^0}{\epsilon^2} + \frac{v_y(2)}{2} \\ -\frac{(x_2^0 - x_1^0)}{\epsilon^2} + \frac{v_x(1)}{2} \\ -\frac{(y_2^0 - y_1^0)}{\epsilon^2} + \frac{v_y(1)}{2} \end{pmatrix} ; \quad \Omega_1 = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x_2^0 - x_1^0}{\epsilon^2} \right)^2 + \left(\frac{y_2^0 - y_1^0}{\epsilon^2} \right)^2}{\left(\epsilon^2 \right)^2}$$

As equações linearizadas (7) também devem ser modificadas para incluir correção em ϵ^2 . Um cálculo simples mostra que (7) fica

$$Z_{n+1} = U_n Z_n + C_n - D_n \delta(\epsilon^2) \quad (11)$$

com

$$D_n = \begin{pmatrix} v_x(n) \\ v_y(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iterando (11) obtemos

$$z_{N+1} = M_1 z_1 + B - A\delta(\epsilon^2) \quad (12)$$

onde

$$A = U_N \dots U_2 D_1 + U_N \dots U_3 D_2 + \dots U_N D_{N-1} + D_N$$

Eliminando $\delta(\epsilon_2)$ da equação (10) e impondo $z_{N+1} = z_1$ chegamos a

$$z_1 = \left(1 - M_1 + \frac{\Gamma_1}{\Omega_1} \right)^{-1} \left(B + \frac{\delta E_1}{\Omega_1} A \right) \quad (13)$$

onde

$$(\Gamma_1)_{ij} = D_i \Delta_j$$

Dada então uma solução tentativa, um ϵ_0^2 tentativo e uma energia E a ser atingida, calculamos

$$\delta E_1 = E - E_1$$

z_1 , pela equação (13)

$z_2, \dots, z_N$, pela equação (12)

$\delta(\epsilon^2)$, pela equação (10)

$$\epsilon^2 = \epsilon_0^2 + \delta(\epsilon^2)$$

e iteramos todo o processo até a precisão desejada.

Apesar de um pouco mais complicado, esse segundo método é muito útil e funciona tão bem quanto o primeiro.

VI. CAOS NA MECÂNICA QUÂNTICA

1. Introdução

Não existe caos quântico no sentido estrito de separação exponencial de "trajetórias vizinhas". Isso pode ser visto da seguinte forma: seja

$$|f(0)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle$$

uma condição inicial para a equação de Schrödinger $i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle$ onde $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$. Uma "trajetória vizinha" pode ser representada por

$$|g(0)\rangle = \sum_n (c_n + \delta c_n) |\varphi_n\rangle$$

Definindo a distância entre duas funções $|f\rangle$ e $|g\rangle$ por

$$d = ||f\rangle - |g\rangle|^2 = (\langle f| - \langle g|)(|f\rangle - |g\rangle)$$

é fácil ver que

$$d(t) = d(0) = \sum_n |\delta c_n|^2$$

Ou seja, não apenas não há separação exponencial como não há separação alguma! Os vetores $|f\rangle$ e $|g\rangle$ rodam pelo espaço de Hilbert mantendo sempre a mesma distância entre eles.

De qualquer maneira, o fato da Hamiltoniana H ser ou não integrável deve afetar o comportamento quântico de alguma forma. Esse efeito deve se manifestar principalmente no limite semiclássico, onde as ações típicas são muito maiores que a constante de Planck (ou $\hbar \rightarrow 0$). Nesse limite as propriedades clássicas são ressaltadas e as diferenças entre movimento regular e caótico devem ficar mais claras. Estudaremos aqui dois aspectos dessa questão: primeiro veremos como obter informações quânticas sobre o espectro do sistema através do conhecimento de suas órbitas clássicas, i.e., uma generalização da regra WKB. Mostraremos que aqui também as órbitas periódicas desempenham papel fundamental. Em seguida, veremos que o espectro quântico em si tem propriedades estatísticas bem diferentes no caso de sistemas integráveis e caóticos, esses últimos tendo propriedades semelhantes às das matrizes aleatórias.

2. A Fórmula do Traço de Gutzwiller

A densidade espectral (ou função de Green) definida por

$$G(E) = \text{tr} \left(\frac{1}{E-H} \right) = \sum_n \frac{1}{E-E_n} \quad (1)$$

pode ser obtida através do propagador $e^{-iHt/\hbar}$ pela transformação

$$\sum_n \frac{1}{E-E_n} = \int dx \, dt \, \langle x | e^{-iHt/\hbar} | x \rangle e^{iEt/\hbar} \quad (2)$$

De fato, inserindo-se em (2) um conjunto completo

$\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$ das auto-funções de H no lado direito, chega-se imediatamente ao lado esquerdo.

A equação acima fornece uma ótima maneira de se obter os níveis de energia E_n no limite semiclássico: a integral do lado direito pode ser calculada pelo método de fase estacionária, assim como o propagador de Feynman $K(x,x,t) = \langle x|e^{-i\hbar T/\hbar}|x\rangle$ pode ser obtido via integrais de trajetória. A esperança é que a função aproximada $\tilde{G}(E)$ assim obtida, também tenha polos em $\tilde{E}_n$ e que esses polos sejam boas aproximações para os níveis exatos E_n .

O cálculo de $\tilde{G}(E)$ é longo e complicado e pode ser encontrado "aos pedaços" nos trabalhos de Gutzwiller do início dos anos 70. O resultado no entanto é, de certa forma, intuitivo: como o propagador $K(x,x,t)$ representa a amplitude de probabilidade de, estando em x em $t = 0$, voltarmos a x no instante t posterior, no limite semiclássico só contribuem para $K(x,x,t)$ as órbitas clássicas que saem e voltam para x no tempo t . O peso de cada contribuição é proporcional à $\exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(x,x,t)\right\}$, onde S é a ação clássica. Quando a integral sobre x é feita na aproximação de fase estacionária, resulta que

$$\left.\frac{\partial S(x'',x',t)}{\partial x''}\right|_{x''=x'=x} + \left.\frac{\partial S(x'',x',x)}{\partial x'}\right|_{x''=x'=x} = 0 \quad ,$$

ou

$$p(t) - p(0) = 0 \quad .$$

Ou seja, além de termos $x(t) = x(0) = x$, os momentos

também devem coincidir, $p(t) = p(0) = p$. Então, só contribuem para $\tilde{G}(E)$ as órbitas periódicas! O resultado final é conhecido como fórmula do traço de Gutzwiller FTG:

$$\tilde{G}(E) = \bar{G}(E) + \frac{1}{i\hbar} \sum_{o.p.} \frac{T_o}{2|A|} \exp \left\{ i \left(\frac{S}{\hbar} - \ell \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (3)$$

onde:

S = ação clássica = $\oint p \cdot dq$

T_o = período primitivo

ℓ = número de pontos conjugados ao longo da órbita

$A = \begin{cases} \sinh(\mu/2) & \text{para orb. instáveis diretas} \\ i \cosh(\mu/2) & \text{para orb. instáveis inversas} \\ i \sin(\theta/2) & \text{para orb. estáveis} \end{cases}$

$\sum_{op}$ = soma sobre todas órbitas periódicas com energia E

$\bar{G}(E)$ = densidade espectral média, que é suave e não contém polos

A despeito da beleza formal da FTG, é evidente que se há polos em $\tilde{G}$, esses não são evidentes. Recentemente tem sido propostas várias maneiras de se efetuar somas parciais sobre o.p. de forma que os polos apareçam. Vamos ver os dois procedimentos mais simples apenas

a) Somando repetições de órbitas estáveis

A $\sum_{o.p.}$ pode ser dividida em $\sum_{o.pr} \sum_{n=1}^{\infty}$ onde a primeira

soma corre sobre "órbitas primitivas", ou seja, órbitas distintas,

e a segunda sobre repetições de cada órbita (n voltas sobre a mesma órbita primitiva). Vamos ver como fica a soma parcial sobre as repetições de uma única órbita primitiva:

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{i\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \sin \frac{n\theta}{2}} e^{in(S/\hbar)} &= \frac{T_0}{i\hbar} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} e^{in[\frac{S}{\hbar} - (k+1/2)\theta]} = \\ &= \frac{T_0}{i\hbar} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{i[S/\hbar - (k+1/2)\theta]}}{1 - e^{i[S/\hbar - (k+1/2)\theta]}} \end{aligned} \quad (5)$$

Usamos acima os seguintes fatos:

1) como o número de pontos conjugados é dado por ℓ = parte inteira de θ/π , o módulo no $\sin n\theta/2$ cancela exatamente o fator $i n \pi \ell / 2$;

$$2) \frac{1}{2i \sin n\theta/2} = \frac{e^{-in\theta/2}}{1 - e^{-in\theta}} = e^{-in\theta/2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ink\theta}.$$

A equação (5) acima tem polos para

$$S(E) = 2\pi\hbar[n + (k+1/2)\theta/2\pi] \quad (6)$$

que é parecida com a regra WKB mas que agora depende do ângulo de estabilidade $\theta(E)$. Embora muito elegante a Eq. (6) aplicada a exemplos simples mostrou-se inadequada, com muitos polos "espúrios" que não correspondem a níveis reais.

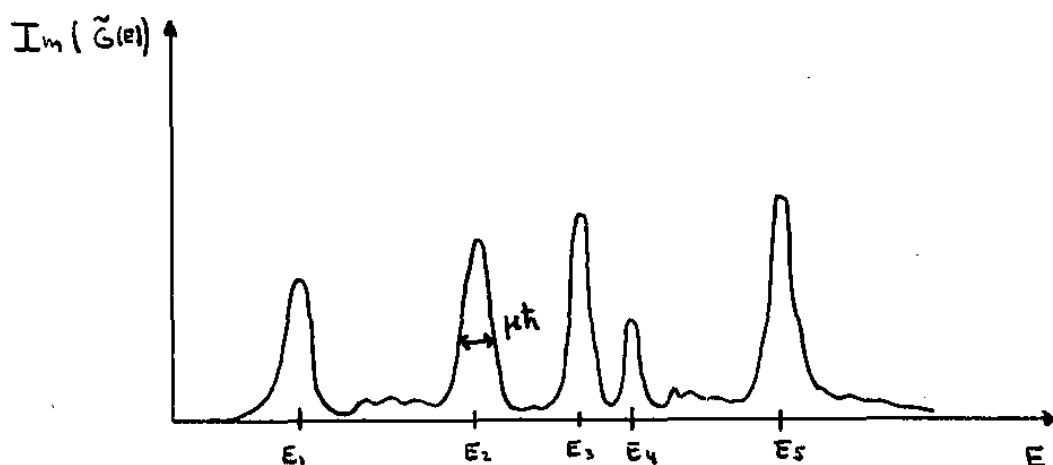
b) Somando repetições de órbitas instáveis

O cálculo agora é muito semelhante ao que fizemos acima, com duas diferenças básicas: o número ℓ permanece e θ $i\mu$. Isso

mostra que os polos só ocorrerão em energias complexas. No entanto, os máximos de $\tilde{G}$ sobre o eixo real ocorrerão quando

$$S(E) = 2\pi\hbar[n+l/4] \quad (7)$$

e a largura dos picos será proporcional a $\mu\hbar$. Então, para μ suficientemente pequeno (órbitas fracamente instáveis), $\mu\hbar$ pode ser bem menor do que o espaçamento médio entre níveis vizinhos e a posição dos picos corresponderá a níveis de energia individuais:



Assim como no caso de órbitas estáveis, a regra de quantização (7) não parece fornecer resultados muito precisos.

c) Outras somas parciais

Outros procedimentos tem sido propostos nos últimos anos para efetuar a $\sum_{o.p.}$ de forma convergente. Esses são, no entanto,

bem mais complexos que os acima e só serão citados:

- Soma sobre órbitas homoclínicas, de A.M. Ozorio de Almeida

- Expansão em curvatura, de P. Cvitanovic e B. Eckhardt
- Pseudo-órbitas, de M. Berry e J. Keating

3. Propriedades Estatísticas do Espectro

A fórmula do traço, eq. (3), para a densidade espectral nos diz que para $h \rightarrow 0$, o número de estados por intervalo de energia pode ser escrito como um termo médio $\bar{G}(E)$ corrigido por flutuações devido às órbitas periódicas. Se h é pequeno podemos fazer médias locais sobre intervalos de energia $\delta E \sim h$ em vez de levar em conta as flutuações de forma exata. Como $\bar{G}(E) \sim h^{-L}$ (para L graus de liberdade), o número de estados contidos em δE é $\delta N = h^{-L+1}$ que é grande para $L \geq 2$. Isso mostra que podemos fazer um tratamento estatístico do espectro mesmo em regiões de energia classicamente pequenas.

Um dos resultados surpreendentes obtidos por Bohigas e colaboradores em 1984 é que sistemas com análogo clássico caótico possuem as mesmas propriedades estatísticas apresentadas por ensembles de matrizes aleatórias, enquanto que os integráveis obedecem estatísticas do tipo Poisson.

Das várias medidas estatísticas possíveis, duas tem sido usadas mais frequentemente: a distribuição de espaçamento de primeiros vizinhos, NND (nearest neighbor distribution) e a rigidez espectral Δ_3 que são definidas da seguinte forma:

- a NND é um gráfico $P(s)$ versus s onde $P(s)$ é a probabilidade de que a distância entre dois níveis vizinhos seja igual a s

em unidades de espaçamento médio $\bar{s} = \frac{1}{(N-1)} \sum_{n=1}^{N-1} (E_{n+1} - E_n)$. Na prática constroem-se um histograma: dada uma região do espectro $\{E_n\}_{n=1, \dots, N}$ calculamos os $N-1$ números $X_n = (E_{n+1} - E_n) / \bar{s}$, $n=1, \dots, N-1$. Então fixamos um tamanho $\epsilon \ll 1$ (por exemplo $\epsilon = 0.1$) e marcamos quantos dos X_n estão entre 0 e ϵ , depois entre ϵ e 2ϵ , etc. e montamos o histograma. No limite $\epsilon \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$ obtém-se $P(s)$ versus s .

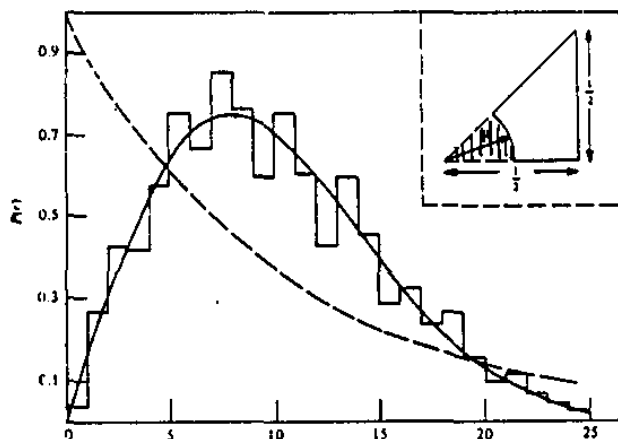
- A rigidez espectral Δ_3 é uma medida de quão "não igualmente espaçado" é o espectro:

$$\Delta_3(L, \alpha) = \frac{1}{L} \min_{A, B} \int_{\alpha}^{\alpha+L} [\bar{G}(E) - AE - B]^2 dE$$

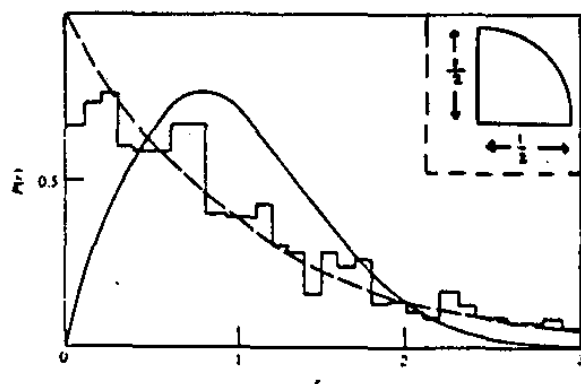
onde as constantes A e B ajustam a melhor reta de comprimento L entre α e $\alpha+L$ que passa por $G(E)$. É uma espécie de desvio quadrático médio local.

Um enorme número de simulações computacionais tem confirmado a conjectura de Bohigas, embora a única evidência analítica desse fato esteja contido no trabalho de Hannay e Ozorio de Almeida.

Os gráficos abaixo mostram o histograma NND computado para um sistema caótico, o bilhar de Sinai,



e para um sistema integrável, o "quarto-de-bilhar" circular,



A curva GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) corresponde ao resultado de matrizes aleatórias ortogonais

$$P_{\text{GOE}}(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-s^2 \pi^4}$$

e a curva Poisson é dada por

$$P_{\text{Poisson}}(s) = e^{-s} \quad .$$

APÊNDICE: TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS EM VARIÁVEIS COMPLEXAS

Em variáveis reais q, p as Eq. de Hamilton são

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad .$$

Definindo

$$\begin{cases} z = \frac{q+ip}{\sqrt{2}} \\ \bar{z} = \frac{q-ip}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} q = \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}} \\ p = \frac{z-\bar{z}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

vemos que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial q} - i \frac{\partial}{\partial p} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial q} + i \frac{\partial}{\partial p} \right) \quad .$$

Então

$$\dot{z} = \frac{\dot{q}+i\dot{p}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial H}{\partial p} - i \frac{\partial H}{\partial q} \right) = -i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}}$$

$$\dot{\bar{z}} = i \frac{\partial H}{\partial z} \quad .$$

Definindo $\mathcal{H} = -iH$, vemos que

$$\dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}} \quad , \quad \dot{\bar{z}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}$$

e então z faz o papel de coordenada e $\bar{z}$ de momento. Ao mudar de $(z, \bar{z})$ para $(w, \bar{w})$ temos que

$$\delta \int (\bar{z} \dot{z} - \mathcal{H}) dt = \delta \int (\bar{w} \dot{w} - \mathcal{K}) dt = 0$$

o que implica em

$$\bar{z} \dot{z} - \mathcal{H} = \bar{w} \dot{w} - \mathcal{K} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$$

Se $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(z, w, t)$

$$\bar{z} \dot{z} - \mathcal{H} = \bar{w} \dot{w} - \mathcal{K} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t}$$

e

$$\bar{z} = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z} \quad ; \quad \bar{w} = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} \quad ; \quad \mathcal{H} = \mathcal{K} - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t}$$

Para $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2(z, \bar{w}, t) - w\bar{w}$,

$$\bar{z} \dot{z} - \mathcal{H} = \bar{w} \dot{w} - \mathcal{K} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{w}} \dot{\bar{w}} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} - \dot{w}\bar{w} - w\dot{\bar{w}}$$

e

$$\bar{z} = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z} \quad ; \quad w = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{w}} \quad ; \quad \mathcal{H} = \mathcal{K} - \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} \quad ,$$

que são as transformações usadas no Capítulo 2.

REFERENCIAS POR CAPITULO

CAPÍTULO 1

- H. Goldstein , "Classical Mechanics", (Addison-Wesley) 1980 , cap. 9 e 10.
- V.I. Arnold , "Mathematical Methods of Classical Mechanics", (Springer-Verlag) 1978 , cap. 3 e 10

CAPÍTULO 2

- A.M. Ozorio de Almeida , "Sistemas Hamiltonianos : Caos e Quantização", (Ed. Unicamp) 1988 , cap.4
- V.I. Arnold , "Mathematical Methods of Classical Mechanics", (Springer-Verlag) 1978 , Apêndice 6
- R. Egydio de Carvalho , Tese de Mestrado (IFGW-Unicamp) 1985

CAPÍTULO 3

- M.V. Berry , in Topics in Nonlinear Dynamics, ed. S. Jorna , Am. Inst. Conf. Proc. 46 (1978) 16
- A.M. Ozorio de Almeida , "Sistemas Hamiltonianos : Caos e Quantização", (Ed. Unicamp) 1988 , cap.6
- A.J. Lichtenberg , M.A. Lieberman , "Regular and Stochastic Motion" , Springer, NY, 1983 , cap.3

CAPÍTULO 4

- J. Hannay and A.M. Ozorio de Almeida, J. Phys. A17 (1984) 3429
M.A.M. de Aguiar et al, Ann. Phys. 180 (1987) 167
M.A.M. de Aguiar and C.P. Malta, Physica D30 (1988) 413
M.A.M. de Aguiar , Tese de Doutorado (IF-USP) 1987
M. Baranger, K.T.R. Davies, Ann. Phys. 177 (1987) 330
K.R. Meyer, Trans Am. Math. Soc. 149 (1970) 95
K.R. Meyer, Trans Am. Math. Soc. 154 (1971) 273

CAPÍTULO 5

- M. Baranger, K.T.R. Davies and J.H. Mahoney, Ann. Phys. 186 (1988)
95
M.A.M. de Aguiar , Tese de Doutorado (IF-USP) 1987
M.A.M. de Aguiar et al, Ann. Phys. (1992) no prelo

CAPÍTULO 6

- M. Gutzwiller , J. Math. Phys. 8 (1967) 1979
M. Gutzwiller , J. Math. Phys. 10 (1969) 1004
M. Gutzwiller , J. Math. Phys. 11 (1970) 1791
M. Gutzwiller , J. Math. Phys. 12 (1971) 343
M. Gutzwiller , "Chaos in Classical and Quantum Mechanics",
Springer-Verlag 1990
A.M. Ozorio de Almeida , "Sistemas Hamiltonianos : Caos e
Quantização", (Ed. Unicamp) 1988 , cap.7,8, e 9.

- A.M. Ozorio de Almeida , Nonlinearity 2 (1989) 519
- P. Cvitanovi and B. Eckhardt , Phys. Rev. Lett. 63 (1989) 823
- M.V. Berry and J. Keating , J. Phys. A23 (1990) 4839
- M. Sieber and F. Steiner , Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 1941
- O. Bohigas and M.J. Giannoni , Lec. Notes in Phys. 209 (1984)
- O. Bohigas, M.J. Giannoni and C. Schmit , Phys. Rev. Lett. 52
(1984) 1
- C. Porter , "Statistical Theories of Spectra : Fluctuations"
Academic Press 1965
- M.L. Metha / "Random Matrices and the Statistical Theory of Energy
Levels" Academic Press 1967