Condições de contorno dos Neurônios - A Equação do Cabo baseada no Modelo de Hodgkin-Huxley

Matheus Gomes Pereira Fafiães [1], Roberto Carlos Antunes Thomé [2],
[1,2]CEFET/RJ-Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro-RJ, Brasil

Introdução

O modelo de Hogdkin-Huxley baseia-se no processo da bomba de Sódio-Pótassio cuja função é a de manutenção do potencial de repouso das células nervosas, gerando, assim, uma diferença de potencial [1].

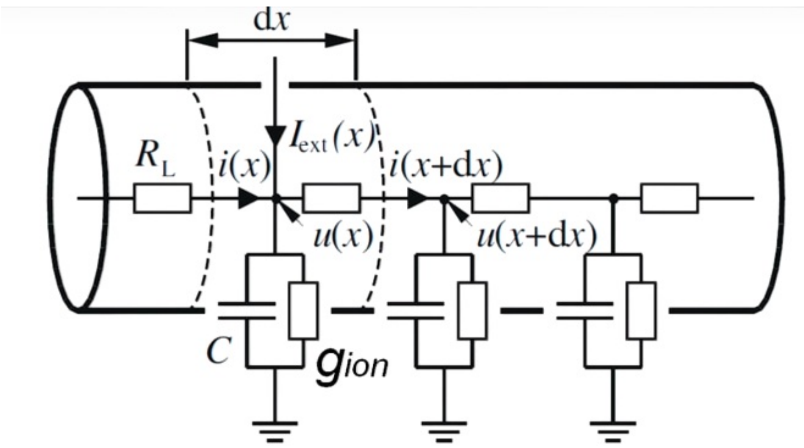
Estruturalmente a fenda sináptica se assemelha a um capacitor e os canais de Sódio e de Potássio a resistores. Sendo assim, é possível modelar através da análise de malhas de Kirchhoff um circuito equivalente a um segmento do cérebro. E, além disso, existirão condições de contorno que influenciarão no pulso, já que a plasticidade da membrana armazenará, em grande quantidade, pequenas tensões [2].

Metodologia

A partir do Modelo de Hodgkin-Huxley:

$$C\frac{dU}{dt} = -n^4 g_K(U-E_K) - m^3 h g_{Na}(U-E_{Na}) - g_l(U-E_l) + I(t)$$

Proveniente da análise de malhas de Kirchhoff, é possível observar os potenciais dos neurônios. Entretanto, para levar em consideração a tensão proveniente da plasticidade da membrana, será feita a análise de um cabo cilíndrico infinitesimal que representa a estrutura de qualquer tipo de neurônio.



[1] fafiaesmatheus@hotmail.com

[2] roberto.thome@cefet-rj.br

Esse cilindro está ligado aos circuitos que representam o modelo de Hodgkin-Huxley, sendo assim, serão analisados três modelos que descreverão o comportamento da atuação dos neurotransmissores:

$$-I_{sin}(t) = -g_{sin}(t)(u - E_{sin})$$
$$g_{sin}(t) = ||g_{sin}||e^{-(t-t_K)\tau}\Theta(t-t_K)$$
$$\sum_K g_{sin}(t) = ||g_{sin}||e^{-\frac{(t-t_K)}{\tau}}[1 - e^{-\frac{(t-t_K)}{\tau_{subida}}}]\Theta(t-t_K)$$

Juntando as quatro equações e fazendo alguns ajustes matemáticos, temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = cr_L\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + r_L\sum_{ion} i_{ion}(t,x) - r_L i_{ext}(t,x)$$

Onde r_L é a resistência longitudinal; c é a capacitância e i_{ion} a corrente dos íons.

Finalmente, sabendo que $\sum_{ion} i_{ion}(t,x) = \dfrac{u(t,x)}{r_m}$ onde r_m representa a resistência por unidade longitudinal da membrana,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = cr_L\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + r_L\frac{u(t,x)}{r_m} - r_L i_{ext}(t,x)$$

Multiplicando tudo por r_m e dividindo por r_L temos:

$$\frac{r_m}{r_L}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = cr_m\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + u(t,x) - r_m i_{ext}(t,x)$$

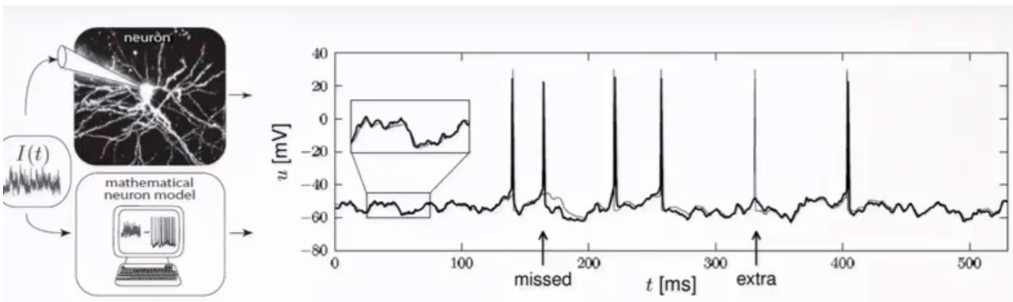
Considerando $cr_m = \tau$ e $\frac{r_m}{r_L} = \lambda$, temos a Equação do Cabo:

$$\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \tau\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + u(t,x) - r_m i_{ext}(t,x)$$

Conclusão

Pôde-se concluir um estudo voltado para parametrizar o processo da sinapse, encontrar valores de tensões responsáveis pelos processos do corpo e enfim esquematizar todo um ciclo de ações potenciais oriundas do ser humano.

Além disso, com o uso do modelo, podemos medir as ações potenciais através do Matlab, como sugere a Figura a seguir:



Referências

[1] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *The Journal of Physiology*, 117 (4): 500544, 1952. DOI:10.1113/jphysiol.1952.sp004764

[2] W. Gerstner, W. Kistler, R. Naud and L. Paninski. Neuronal Dynamics: From Single Neurons to Networks and Models of Cognition. *Cambridge: Cambridge University Press*, 2014. DOI:10.1017/CBO9781107447615