

Uma pista sobre equivalência de integrabilidade em EDO's nos critérios de Painlevé e Lie

Felipo Bacani¹,

¹Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas – DECEA/Icea/UFOP – Campus João Monlevade, Brasil

Resumo: Um dos resultados [1] mais celebrados na biomatemática envolvendo soluções analíticas envolve a clássica equação de Fisher. Nesta referência, foi obtido que as ondas viajantes desta equação têm formas simples para a velocidade de onda $c = \pm 5/\sqrt{6}$. Neste caso a solução é do tipo Painlevé, onde as soluções admitem apenas polos como singularidades removíveis. A integrabilidade (isto é, sermos capazes de obter uma solução explícita) no sentido de Painlevé é importante pelo fato de sua existência apontar na direção da existência de uma EDO ter solução analítica [7]. A ideia do atual trabalho é investigar a existência de simetrias de Lie da equação de Fisher quando procura-se por uma solução do tipo onda viajante. O ponto fundamental deste trabalho é a descoberta de que o valor de velocidade de onda $c = \pm 5/\sqrt{6}$ para que a equação seja do tipo Painlevé é justamente a condição que a equação de Fisher tenha simetrias de Lie não triviais (além de translações $z \rightarrow z + \varepsilon$). Atualmente está sendo investigado qual é a solução obtida a partir do método de simetrias de Lie, qual sua relevância biológica e como essa solução se compara à solução obtida em [1].

Palavras-chave: Biomatemática, Equações Diferenciais Ordinárias, Integrabilidade, Simetrias de Lie

Introdução

A técnica de simetrias de Lie permite obter, de forma sistemática, quais são as simetrias de uma determinada equação diferencial ordinária ou parcial. Tais simetrias muitas vezes informam algo sobre a física do problema (possibilidade de translação da solução no tempo ou espaço, conservação de energia ou momento, etc.), e permitem a obtenção de soluções analíticas ou trocas de variáveis que simplifiquem o problema [3], e foi ferramenta fundamental na obtenção de soluções para problemas da área espacial e da física teórica. Têm sido feitos esforços recentes em aplicar a técnica de simetrias de Lie a problemas de outras áreas, como a área biológica [2].

Um dos resultados de soluções analíticas [1] mais celebrados na biomatemática envolve a Equação de Fisher (6.19) (aqui na forma adimensional), uma EDP não linear com termo difusivo, inicialmente proposta como um modelo para propagação de um gene mutante com vantagem de seleção de intensidade controlável. Descobriu-se que a equação se aplica também à propagação de chamuscas, no processo motor do movimento browniano e na teoria de reatores nucleares:

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u) \quad (6.19)$$

$$u'' + cu' + u(1 - u) = 0 \quad (6.20)$$

¹fbacani@ufop.edu.br

Para uma solução do tipo ondas viajantes da Eq. (6.20), onde transforma-se a EDP numa EDO a partir da troca de variáveis “ $z = x - ct$ ”, foi obtida na referência [1] que se $c = \pm 5/\sqrt{6}$ a EDO é do tipo Painlevé (onde as soluções admitem apenas polos como singularidades removíveis), e dizemos que a equação é “integrável” no sentido de Painlevé pelo fato de podermos obter uma solução explícita a partir da técnica.

A integrabilidade (isto é, sermos capazes de obter uma solução explícita) no sentido de Painlevé é importante pelo fato de sua existência apontar na direção da existência de uma EDO ter solução analítica [7]. Contudo, a desvantagem das soluções encontradas a partir do método de Painlevé é que são soluções de séries de potências no plano complexo, e foi a partir de uma série de simplificações que foi possível escrever a solução de forma explícita. Uma vantagem da técnica de simetrias de Lie é que a existência de tais simetrias implica na possibilidade de obtenção de solução de um método sistemático.

Do ponto de vista operacional, obter simetrias de Lie implica na resolução de problemas polinomial bastante extensos, mas uma vez que se encontra as simetrias, o procedimento de encontrar soluções é algorítmico. Uma forma de lidar com essa dificuldade operacional foi a utilização de álgebra simbólica.

Desenvolvimento

Utilizando matemática simbólica a partir do programa de software livre Maxima [4], que é basicamente uma forma de realizar contas algébricas no computador, foi aplicada a técnica de simetrias de Lie à equação de Fisher transformada (6.20). Foi descoberto que a condição da existência de simetrias de Lie é que a velocidade de onda $c = \pm 5/\sqrt{6}$ é exatamente a mesma que foi obtida a partir da técnica distinta de Painlevé em [1]. Então temos o fato notável de, para esta equação clássica, a mesma condição para existência de solução no sentido de Painlevé é a existência de simetrias de Lie não triviais (isto é, que não sejam translação, $z \rightarrow z + \epsilon$).

Uma vantagem inegável da técnica de Painlevé é que é razoavelmente simples encontrar condições para que uma EDO seja do tipo Painlevé, enquanto encontrar soluções para tais casos é razoavelmente delicado. Portanto, mostra-se interessante explorar a relação entre os conceitos de integrabilidade de Painlevé e Lie, de forma a aproveitar as vantagens de cada uma delas; Isto é, obter as condições para integrabilidade por Painlevé, e as soluções utilizando simetrias de Lie [5,6].

Atualmente está sendo investigado qual é a solução obtida a partir do método de simetrias de Lie, qual sua relevância biológica e como essa solução se compara à solução obtida pela técnica de Painlevé em [1].

Considerações Finais

Há também a possibilidade de investigar futuramente como, do ponto de vista teórico, as duas noções de integrabilidade se interceptam e quais as hipóteses matemáticas envolvidas. Isto é, em que sentido a integrabilidade de Painlevé é mais ou menos restritiva que a integrabilidade em simetrias de Lie.

Destacamos que a relação entre técnicas analíticas distintas é extremamente frutífera e construtiva, e as técnicas de matemática simbólica computacionais são extremamente importantes em obter resultados comparativos que destacam tais relações.

Referências

- [1] M. J. Ablowitz, A. Zeppetella. Explicit solutions of fisher's equation for a special wave speed. *Bulletin of Mathematical Biology*, 41:835–840, 1979.
- [2] F. Bacani, S. Dimas, I. L. Freire, N. A. Maidana, M. Torrisi, Mathematical modelling for the transmission of dengue: symmetry and travelling wave analysis. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 41, 269-287, 2018.
- [3] Bluman, W. G., Anco, C. S. *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*. Springer.
- [4] Hereman, W., SYMMGRP.MAX and other Symbolic Programs for Lie Symmetry Analysis of Partial Differential Equations, *of Partial Dierential Equation, Lectures in Appl. Math*, 241–257, 1999.
- [5] S. Kumar, K. Singh, and R.K. Gupta. Painlevé analysis, lie symmetries and exact solutions for (2+1)-dimensional variable coefficients broer–kaup equations. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 17:1529-1541, 2012.
- [6] M. C. Nucci. Lie symmetries of a painlevé-type equation without lie symmetries. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 15(2):205–211, 2008.
- [7] S. V. Petrovskii, Bai-Lian Li. *Exactly Solvable Models of Biological Invasion*. Chapman & Hall/CRC, 2006.