

## Um comparativo entre modelos discreto, contínuo e estocástico aplicados na dinâmica populacional brasileira

Matheus dos Santos Alves<sup>1</sup>, Raphael de Oliveira Garcia<sup>2</sup>,

<sup>1,2</sup>Departamento de Ciências Atuariais, Universidade Federal de São Paulo, UNIFESP, Brasil

### Introdução

Mudanças significativas na população brasileira, nas últimas décadas, fizeram com que as projeções demográficas ganhassem importância no cenário de decisões em diversas áreas do conhecimento. Entender o comportamento da dinâmica populacional brasileira pode contribuir tanto no âmbito acadêmico, social, quanto no empresarial. Tais informações podem auxiliar em tomadas de decisões relacionadas à medidas de saúde pública e em questões previdenciárias.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho foi utilizar diferentes modelos matemáticos de dinâmica populacional e os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), para realizar projeções demográficas da população brasileira. Para isto, foram analisados dois modelos discretos (sendo um deles o modelo logístico discreto), um modelo logístico contínuo e um modelo logístico estocástico. Após a implementação computacional, comparações entre os modelos foram realizadas. Por fim, o propósito é confrontar os modelos utilizados no projeto com o modelo oficial utilizado pelo IBGE, assim como seus respectivos resultados.

### Modelos de Dinâmica Populacional

Neste estudo foram abordados 4 (quatro) diferentes tipos de modelos matemáticos, representados por equações distintas. No primeiro modelo, supõe-se que a dinâmica populacional brasileira é representada por um modelo logístico discreto [1], assim temos

$$P_{n+1} = (1+a)P_n - bP_n^2, \quad n \geq 0, \quad (7.6)$$

em que  $a$  e  $b$  são, respectivamente, as médias das taxas de natalidade e mortalidade, no período de 2000 à 2017, e  $P_0$  é a população brasileira em 2017.

No segundo modelo optou-se por observar a quantidade de nascimentos e óbitos, ao invés de considerar o valor médio das taxas de natalidade e mortalidade como ocorrido do primeiro modelo. Ao se trabalhar com os dados do IBGE foi possível notar a tendência de um comportamento linear, o que resultou no ajuste de regressões lineares [4] a fim de se obter os futuros valores da quantidade de nascimentos e óbitos. Dessa forma, a variação entre nascimentos  $\hat{y}_n$  e óbitos  $\hat{z}_n$ , a cada ano, foi definida por  $\Delta P_n = \hat{y}_n - \hat{z}_n$ , em que  $\hat{y}_n$  e  $\hat{z}_n$  são retas obtidas de regressões lineares da taxa de natalidade e mortalidade. O segundo modelo é representado pela seguinte equação de diferença:

$$P_{n+1} = P_n + \Delta P_n, \quad n \geq 0. \quad (7.7)$$

---

<sup>1</sup>matheusantosalves@outlook.com

<sup>2</sup>gr.gubim@gmail.com

As regressões lineares efetuadas tiveram uma correlação linear de aproximadamente 0,95.

No terceiro modelo por sua vez, considerou-se que a população brasileira tem um comportamento próximo de um modelo logístico contínuo [1], que deriva da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right), \quad P(0) = P_0, \quad (7.8)$$

em que a solução analítica é dada por:

$$P(t) = \frac{P_\infty P_0}{(P_\infty - P_0) e^{-rt} + P_0}, \quad (7.9)$$

onde  $r$  é a taxa de crescimento da população, determinada a partir de uma regressão logarítmica [4] dos dados do IBGE,  $P_\infty$  é o valor máximo da população e  $P_0$  a população em 2017.

Por fim, o quarto modelo aplicado à população brasileira encontra-se em desenvolvimento. Neste caso, um modelo logístico estocástico de dinâmica populacional está sendo representado pela equação diferencial:

$$\frac{dP(t)}{dt} = r_\varepsilon P \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right), \quad P(0) = P_0, \quad (7.10)$$

em que  $r_\varepsilon = r + s\varepsilon(t)$  é um parâmetro estocástico da taxa de crescimento da população,  $\varepsilon$  é um ruído branco,  $s > 0$  é uma constante e  $r$  é a taxa obtida do terceiro modelo. A solução da equação diferencial estocástica é dada por

$$P(t) = \frac{P_\infty P_0 e^{rt+sW_t}}{(P_\infty - P_0) e^{rt+sW_t}}, \quad (7.11)$$

onde  $W_t$  é um processo de Wiener [3]. Nesta pesquisa todos os códigos foram desenvolvidos em *Octave* pelos autores.

## Resultados

No primeiro modelo, considerando a população brasileira em 2017 como  $P_0 = 2,07661 \times 10^8$  e com os resultados de  $a = 0,031956$  e  $b = 0,011851$ , o modelo logístico mostrou que a população passará a se estabilizar em aproximadamente  $2,622862 \times 10^8$ , isto é, no ano de 2090. Tomando também como  $P_0$  a população brasileira de 2017, no segundo modelo as projeções resultaram em uma população que apresenta um ponto de máximo em  $2,4922 \times 10^8$ , ou seja, no ano de 2084. As simulações mostram que a partir do referido ano, a população começa a diminuir.

Já o modelo contínuo (terceiro modelo), ainda com  $P_0$  a população brasileira de 2017 e utilizando os valores de  $r = 0,0851$  (determinado na regressão logarítmica) e  $P_\infty = 2,4922 \times 10^8$  (dado obtido do segundo modelo), demonstrou uma estabilização por volta de 2053, ou seja, quando a população atingir  $2,4922 \times 10^8$ . Neste momento é interessante notar que, de acordo com o IBGE, a população brasileira interromperá seu crescimento em 2048 [2].

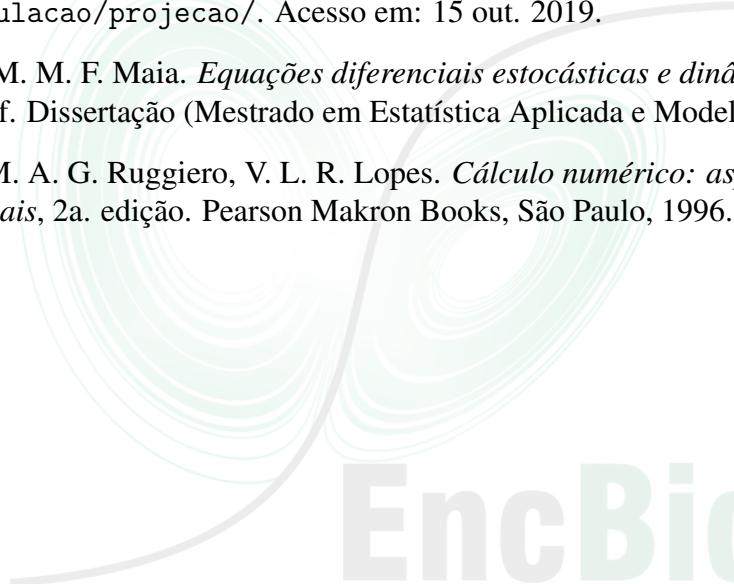
Com a finalização do quarto modelo, fase em que o projeto se encontra, espera-se comparar entre si todos os modelos matemáticos apresentados anteriormente, além de confrontá-los com as informações fornecidas pelo IBGE.

## Agradecimentos

O primeiro autor agradece à UNIFESP - Campus Osasco pela realização da Iniciação Científica Voluntária.

## Referências

- [1] R. C. Bassanezi. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. Contexto, São Paulo, 2002.
- [2] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Projeção da população Brasileira e das unidades da federação*, 2018. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 15 out. 2019.
- [3] M. M. F. Maia. *Equações diferenciais estocásticas e dinâmica de populações*, 2003. 170 f. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Modelação), FEUP, Porto, 2003.
- [4] M. A. G. Ruggiero, V. L. R. Lopes. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, 2a. edição. Pearson Makron Books, São Paulo, 1996.

The logo for EncBioMat features the text "EncBioMat" in a bold, sans-serif font. The letters are primarily white, with some light blue shading on the "E", "B", and "M". The background of the logo consists of several concentric, slightly curved lines in a light grey color, creating a sense of depth and motion.

EncBioMat