

8.1 Um critério de solubilidade para grupos finitos

Ayrton Anjos Teixeira¹, Raimundo de Araújo Bastos Júnior²,

^{1,2}Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

Resumo

Seja G um grupo finito. O conjunto dos divisores primos de G é denotado por $\pi(G)$ e, para cada $p \in \pi(G)$, denotaremos por $n_p(G)$ o número de p -subgrupos de Sylow de G . O conjunto $\{n_p(G) \mid p \in \pi(G)\}$ será denotado por $\text{sn}(G)$ e seus elementos serão chamados de números de Sylow de G . Por fim, definiremos $N(G) = \max(\text{sn}(G))$.

Mostraremos que se $N(G) \leq 9$, então G é solúvel. Ademais, existem grupos não-solúveis com $N(G) = 10$.

Palavras-chave: grupos, solubilidade, subgrupos de Sylow.

Motivação e resultados

Existem diversos resultados envolvendo a solubilidade de grupos finitos impondo certas condições sobre $\text{sn}(G)$, como por exemplo, os trabalhos de A. Moretó ([1]), S.M. Robati ([6]) e J. Zhang [3]. Nesse caso, impomos uma limitação para os números de Sylow do grupo, pois, como é bem conhecido, $N(G) = 1$ se, e somente se, G é nilpotente. Também é possível provar com o Teorema de Sylow que se $|\text{sn}(G)| = 1$, então G é nilpotente. Nesse contexto, faz sentido perguntar para quais $n \in \mathbb{N}$ é válido que G solúvel se $N(G) = n$.

O resultado a seguir oferece uma resposta para a questão anterior.

Theorem 1. Se G é um grupo finito com $N(G) \leq 9$, então G é solúvel.

Além disso, é possível mostrar que o teorema anterior não pode ser estendido para $N(G) \geq 10$, pois, por exemplo, $N(A_5) = 10$.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Moretó, *Groups with two Sylow numbers are the product of two nilpotent Hall subgroups*, Arch. Math., **99** (2012) 301–304.
- [2] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, 2nd edn. Springer, New York (1996)
- [3] J. Zhang, *Sylow numbers of finite groups*, J. Algebra, **176** (1995) 111–123.
- [4] M. Hall Jr., *On the number of Sylow subgroups in a finite group*, J. Algebra, **7** (1967) 363–371.
- [5] R. M. Guralnick, *Subgroups of prime power index in a simple group*, J. Algebra, **81**(2) (1983) 304–311.
- [6] S.M. Robati, *A solvability criterion for finite groups related to the number of Sylow subgroups*, Comm. Algebra, **48** (2020) 5176–5180.

¹teixeiraayrton99@gmail.com

²bastos@mat.unb.br